

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten

por

Dahisy V. de S. Lima

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

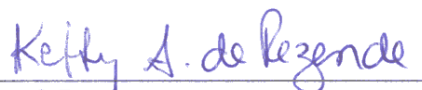
Orientadora: Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

MATRIZES DE CONEXÃO VIA O COMPLEXO DE MORSE-WITTEN

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Dahisy Valadão de Souza Lima** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de agosto de 2010


Prof. Dr.:
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Ketty Abaroa de Rezende
- 2 Marco Antonio Teixeira
- 3 Mariana Rodrigues da Silveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **MESTRE** em **Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Lima, Dahisy Valadão de Souza
L628m Matrizes de conexão via o complexo de Morse-Witten/Dahisy
Valadão de Souza Lima-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Ketty Abaroa de Rezende
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Matriz de conexão. 2.Teoria do índice de Conley. 3.Teoria de
Morse. 4.Teoria de homologia. I. Rezende, Ketty Abaroa de. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Connection matrices via the Morse-Witten complex

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Matrix of connection. 2. Conley index theory.
3. Morse theory. 4. Homology theory.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof^ª. Dr^ª. Ketty Abaroa de Rezende (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC – UNICAMP)
Prof^ª. Dr^ª. Mariana Rodrigues da Silveira (UFABC)

Data da defesa: 05/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de agosto de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof. (a). Dr (a). MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA

Agradecimentos

À minha orientadora Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende pela dedicação e paciência, e por ter me conduzido durante o mestrado com a calma necessária para me ajudar a transpor os momentos difíceis.

À Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira por todo o apoio e ajuda durante o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, por todo apoio e carinho, em especial à minha mãe.

Ao Cnpq pela bolsa de estudo concedida.

Aos funcionários da Secretaria de Pós Graduação do IMECC-UNICAMP pela gentileza e atenção diariamente prestados.

A todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para a concretização desta dissertação, estimulando-me intelectual e emocionalmente.

Resumo

Dada uma variedade suave e fechada M , o complexo de Morse-Witten associado a uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e a uma métrica Riemanniana g em M consiste de grupos de cadeia gerados pelos pontos críticos de f e um operador bordo que conta linhas de fluxos isoladas do fluxo gradiente negativo. A homologia do complexo de Morse-Witten é isomorfa à homologia singular de M .

Dado um conjunto invariante isolado S , uma matriz de conexão para uma decomposição de Morse de S é uma matriz de homomorfismos entre os índices homológicos de Conley dos conjuntos de Morse. A matriz de conexão é capaz de prover informações dinâmicas sobre um fluxo. De fato, esta matriz pode detectar a existência de órbitas conectantes entre os conjuntos de Morse de S .

O complexo de Morse-Witten está relacionado à teoria de matrizes de conexão. Mais precisamente, o operador bordo do complexo de Morse-Witten é um caso especial de matriz de conexão.

Abstract

Given a smooth closed manifold M , the Morse-Witten complex associated to a Morse function $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ and a Riemannian metric g on M consists of chain groups generated by the critical points of f and a boundary operator counting isolated flow lines of the negative gradient flow. The homology of the Morse-Witten complex is isomorphic to the singular homology of M .

Given an isolated invariant set S , a connection matrix for a Morse decomposition of S is a matrix of homomorphism between the Conley homology indices of Morse sets. The connection matrix is capable of providing dynamical information of a flow. In fact, this matrix can detect the existence of connecting orbits among Morse sets of S .

The Morse-Witten complex is related to connection matrices theory. More precisely, the boundary operator of the Morse-Witten complex is a special case of connection matrix.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Preliminares Dinâmicas	5
1.2 Preliminares Algébricas	8
1.2.1 Homologia Singular	9
1.2.2 Sequências Exatas	15
1.2.3 Homologia Relativa	18
1.3 Função de Morse	19
2 O Complexo de Morse-Witten	25
2.1 Fluxos Gradientes	26
2.2 Órbitas Conectantes	29
2.2.1 Transversalidade	31
2.2.2 Compacidade	34
2.2.3 Colagem	38
2.2.4 Orientação de M_{xy}	43
2.3 O Complexo de Morse-Witten	51
2.4 Definição alternativa de $n(x,y)$	56
2.5 Exemplos - Teorema da Homologia de Morse	60
3 Conjuntos Invariantes Isolados	65
3.1 Índice de Conley	66
3.1.1 Índice Homotópico de Conley	68
3.1.2 Índice Homológico de Conley	75
3.2 Decomposição de Conjuntos Invariantes Isolados	78

3.2.1	Decomposição em Par Atrator-Repulsor	78
3.2.2	Decomposição de Morse	82
4	Matriz de Conexão	93
4.1	Matriz de Conexão para um Par Atrator-Repulsor	97
4.2	Matriz de Conexão para uma Decomposição de Morse	103
5	Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten	121
5.1	Matriz de Conexão para Fluxos Morse-Smale	124
5.2	Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten	137
	Referências	151

Introdução

Neste trabalho será abordada a teoria de Conley. Esta teoria tem uma enorme gama de aplicações para o estudo da dinâmica de um sistema.

Um resultado fundamental da teoria de Conley diz que todo fluxo em um espaço métrico localmente compacto pode ser decomposto em uma parte recorrente por cadeia e outra parte do tipo gradiente. O conjunto recorrente por cadeia é um conjunto compacto invariante que contém o conjunto não errante e os pontos que se tornam recorrentes quando pequenos erros são introduzidos no fluxo. Na parte restante do espaço o fluxo é do tipo gradiente, ou seja, existe uma função de Lyapunov contínua que é estritamente decrescente nas órbitas que não estão no conjunto recorrente por cadeia. Se as componentes do conjunto recorrente por cadeia são identificadas a pontos, o espaço quociente é do tipo gradiente. Portanto, o problema de fornecer uma descrição qualitativa do fluxo se divide em duas partes, a descrição das componentes do conjunto recorrente por cadeia e a descrição de como tais componentes se conectam umas às outras.

Na teoria de Conley, é introduzida a noção de decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado S . Uma decomposição de Morse de S é uma coleção finita de conjuntos invariantes isolados disjuntos, chamados conjuntos de Morse, cuja união contém o conjunto recorrente por cadeia de S .

Uma vez que uma decomposição de Morse é fixada, os conjuntos de Morse são descritos pelo índice de Conley, que fornece uma descrição topológica da dinâmica local. A teoria de matrizes de conexão é uma ferramenta importante para o estudo das conexões entre os conjuntos de Morse. Esta teoria foi desenvolvida por Franzosa em [7], [8], [9]. As entradas da matriz de conexão podem registrar a existência de órbitas conectantes do fluxo. Dada uma decomposição de Morse com m conjuntos de Morse, a matriz de conexão é uma matriz $m \times m$ cujas entradas são homomorfismos entre os índices homológicos de Conley associados aos conjuntos de Morse. Essas aplicações são definidas por sequências exatas em homologia.

O objetivo principal deste trabalho é estudar um caso especial de matrizes de conexão, à saber, quando o fluxo em questão é um fluxo Morse-Smale sem órbitas periódicas.

Nesse sentido é apresentado um estudo sobre o índice de Conley (homológico e homotópico) como também sobre o caso geral de matrizes de conexão para decomposições de Morse.

De forma totalmente independente à teoria de Conley, também se faz um estudo sobre a homologia de Morse. Dadas uma variedade Riemanniana (M, g) suave, fechada e de dimensão finita e uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz a condição de Morse-Smale, constrói-se um complexo de cadeia $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$, chamado complexo de Morse-Witten, cujo k -ésimo grupo de cadeia de Morse é o grupo abeliano livre finitamente gerado pelos pontos críticos de f de índice de Morse k .

Interligando a teoria de matrizes de conexão e a teoria de Morse, mostra-se que a diferencial do complexo de Morse-Witten ∂_*^c pode ser interpretada como uma matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale sem órbitas periódicas sobre M .

Este trabalho foi organizado em cinco capítulos, e o desenvolvimento do mesmo seguirá o seguinte roteiro:

- O primeiro capítulo apresenta de forma sucinta os pré-requisitos que servirão de suporte para a compreensão dos capítulos seguintes. Na primeira seção deste capítulo, são expostos alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos. Já na segunda seção as preliminares algébricas são abordadas, os principais conceitos apresentados nesta seção são: homologia singular, sequências exatas e homologia relativa. E finalizando o primeiro capítulo, alguns conceitos básicos da teoria de Morse são definidos.
- O segundo capítulo é dedicado exclusivamente ao complexo de Morse-Witten. Este capítulo contém os ingredientes essenciais para o desenvolvimento do principal capítulo deste trabalho, a saber, o Capítulo 5.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada e suave de dimensão finita. A partir de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cujo fluxo gradiente negativo φ satisfaz a condição de Morse-Smale, são definidos os conceitos de variedades conectantes, espaços moduli, número de intersecção, grupos de cadeia de Morse e, por fim, operador de Morse-Witten. Destes elementos surge o complexo de Morse-Witten. Deste modo, associa-se ao fluxo φ um complexo de cadeia. E o resultado mais importante deste capítulo é

o fato de que a homologia do complexo de Morse-Witten coincide com a homologia singular de M .

- O Capítulo 3 é destinado ao estudo de conjuntos invariantes isolados. Este capítulo introduz a teoria necessária sobre conjuntos invariantes isolados, que será utilizada para definir matriz de conexão no Capítulo 4.

A primeira seção deste capítulo apresenta o índice homotópico e o índice homológico de conjuntos invariantes isolados, bem como suas principais propriedades.

Já na segunda seção, são estudadas duas decomposições para conjuntos invariantes isolados: a decomposição em par atrator-repulsor e, a sua generalização, a decomposição de Morse. Além disso, são apresentados os conceitos de trio-índice, necessário para a definição da matriz de conexão no caso de uma decomposição em par atrator-repulsor, e de filtração-índice, necessário para a generalização da matriz de conexão para decomposições de Morse mais gerais.

- Um dos objetivos deste trabalho é definir matriz de conexão para uma decomposição de Morse de um dado conjunto invariante isolado S . Isto é feito no quarto capítulo, que inicia com uma breve revisão sobre tranças de complexos de cadeia e tranças de módulos graduados. Este capítulo foi dividido em duas seções, a primeira define matriz de conexão para uma decomposição em par atrator-repulsor de S , e a segunda seção generaliza a matriz de conexão para qualquer tipo de decomposição de Morse de S .

No decorrer deste capítulo encontram-se alguns resultados que mostram a importância dinâmica da matriz de conexão na busca de órbitas conectantes entre certos conjuntos.

- O Capítulo 5 é o mais importante deste trabalho. Neste capítulo o complexo de Morse-Witten e a teoria de matriz de conexão são interligados. Mais precisamente, Salamon em [19] mostra que a diferencial do complexo de Morse-Witten é uma matriz de conexão. Através deste resultado, obtém-se uma forma mais prática para obter uma matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale sobre uma variedade Riemanniana M fechada e suave de dimensão finita.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo tem como finalidade apresentar alguns pré-requisitos de sistemas dinâmicos, álgebra e topologia algébrica que serão utilizados ao longo deste trabalho.

A primeira seção deste capítulo apresenta alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos. A seção 1.2 é dedicada à homologia singular, que é um pré-requisito essencial para a teoria de matriz de conexão que será desenvolvida neste trabalho. Já na seção 1.3 encontram-se alguns conceitos elementares da teoria de Morse.

1.1 Preliminares Dinâmicas

Nesta seção, encontram-se algumas propriedades básicas de fluxos. As principais referências para esta seção são: [2], [4], [15] e [18].

Ao longo desta seção, X denotará um espaço topológico qualquer.

Definição 1.1. *Um **fluxo contínuo** φ sobre X é uma ação contínua de \mathbb{R} sobre X , ou seja, é uma aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ que satisfaz:*

1. $\varphi(0, x) = x$, para todo $x \in X$;
2. $\varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Veja que, ao fixar um ponto $x_0 \in X$ e variar $t \in \mathbb{R}$, obtém-se um caminho em X que passa por x_0 no instante $t = 0$. Este caminho é a órbita, em relação ao fluxo φ , que passa pelo ponto x_0 .

Definição 1.2. Dado $x \in X$, a **órbita** através de x com respeito ao fluxo φ é o conjunto $\mathcal{O}_\varphi(x) := \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $\mathcal{O}_\varphi(x) := \varphi(\mathbb{R}, x)$.

Por simplicidade a notação para a órbita de um ponto x , adotada aqui, será $\mathcal{O}(x)$.

Existem 3 tipos de órbitas: órbita singular, órbita fechada e órbita regular. Uma **órbita singular** é uma órbita formada por um único ponto p . Neste caso, o ponto p é dito uma singularidade do fluxo φ . Uma **órbita é fechada** (ou periódica) se existe $T \neq 0$, tal que $\varphi(T, p) = p$ e $\varphi(t, p) \neq p$ sempre que $t \in (0, T)$. Neste caso, a órbita de p é difeomorfa ao círculo S^1 e T é chamado de período da órbita. Uma órbita que não é singular e também não é fechada é chamada de **órbita regular**. As órbitas regulares são imagens de imersões biunívocas de \mathbb{R} em X .

Exemplo 1.1. Seja φ um fluxo em na esfera 2-dimensional S^2 como na Figura 1.1. Os polos norte e sul são singularidades do fluxo e o equador é uma órbita fechada γ . As outras órbitas são regulares, “nascem” em um dos polos e “morrem” no equador. \triangle

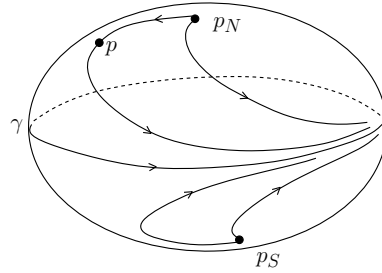


Figura 1.1: Fluxo em S^2 que contém uma órbita periódica γ e duas singularidades p_N e p_S .

Definição 1.3. Um conjunto $S \subset X$ é um **conjunto invariante** em relação ao fluxo φ se, para todo $p \in S$, $\varphi(t, p) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, se $\varphi(\mathbb{R}, S) = S$.

É fácil verificar que qualquer órbita é um conjunto invariante, pois se $y \in \mathcal{O}(x)$ então $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x)$. Além disso, um conjunto é invariante sob φ se, e somente se, é união de órbitas de φ .

Se S é invariante sob φ então o fecho de S e o complementar de S também o são. O mesmo vale para união e intersecção sob qualquer coleção de conjuntos invariantes.

Definição 1.4. Seja $N \subset X$ um subconjunto de X . O **conjunto invariante maximal** de N é definido por:

$$\text{Inv}(N) = \{x \in X \mid \varphi(t, x) \in N, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Se N é um conjunto fechado então $Inv(N)$ também o é, já que o fecho de qualquer conjunto invariante é invariante. No Capítulo 3, será definido novamente conjunto invariante maximal e tal definição será explorada com maiores detalhes.

Os conjuntos limites, que serão introduzidos neste momento, são uma generalização do conceito de limite e ajudam no estudo do comportamento assintótico de um sistema dinâmico. O interesse é saber “para onde vai” um subconjunto ou ponto do espaço de fases quando o tempo tende para ∞ ou $-\infty$.

Definição 1.5. Dado $Y \subset X$, o conjunto ω -**limite** de Y , denotado por $\omega(Y)$, é definido por

$$\omega(Y) = Inv(cl\{\varphi([0, \infty), Y)\}) = \bigcap_{t>0} cl(\varphi([t, \infty), Y)).^1$$

Analogamente, o conjunto ω^* -**limite** (ou α -limite) de Y é definido por:

$$\omega^*(Y) = Inv(cl\{\varphi((-\infty, 0], Y)\}) = \bigcap_{t>0} cl(\varphi((-\infty, -t], Y)).$$

O conjunto ω -limite de uma união finita é a união dos conjuntos ω -limite correspondentes. Em particular, se $z \in Y$, $\omega(z) \subset \omega(Y)$. No entanto, em geral $\omega(Y)$ é maior do que a união dos $\omega(y)$ para $y \in Y$.

Em particular, dado $q \in X$, $\omega(q)$ é o maior conjunto invariante em $\varphi(q, [0, \infty))$, reciprocamente, $\omega^*(q)$ é o maior conjunto invariante em $\varphi(q, [-\infty, 0])$.

Note que o ω^* -limite de p sob o fluxo φ é o ω -limite de p sob o fluxo reverso $-\varphi$. Assim as propriedades de ω^* são repassadas para ω e vice-versa. Além disso, $\omega(q) = \omega(\tilde{q})$ sempre que \tilde{q} pertencer à órbita de q . Intuitivamente, $\omega^*(p)$ e $\omega(p)$ são onde a órbita de p “nasce” e “morre”, respectivamente.

Exemplo 1.2. Considerando novamente o fluxo φ na esfera S^2 como na Figura 1.1, veja que $\omega(p_N) = \omega^*(p_N) = p_N$ e $\omega(p_S) = \omega^*(p_S) = p_S$. Agora se x é um ponto da esfera que não é uma singularidade de φ e não pertence à órbita periódica γ então $\omega(x) = \gamma$, ou seja, a órbita de x “morre” no equador. Já em relação ao conjunto ω^* -limite de x , há dois casos a serem levados em consideração: se x está no hemisfério norte então $\omega^*(x) = p_N$; se x está no hemisfério sul então $\omega^*(x) = p_S$. \triangle

Proposição 1.1. Sejam X um espaço topológico compacto e φ um fluxo sobre X . Seja $Y \subset X$, então:

¹O fecho de um espaço topológico A é denotado por $cl(A)$.

1. $\omega(Y) \neq \emptyset$;
2. $\omega(Y)$ é fechado;
3. $\omega(Y)$ é invariante pelo fluxo φ em X ;
4. $\omega(Y)$ é compacto em X ;
5. $\omega(Y)$ é conexo se Y for conexo.

A demonstração desta proposição é simples e pode ser encontrada em [18].

Vale a pena notar que as propriedades da Proposição (1.1) também são válidas para o conjunto ω^* -limite.

Exemplo 1.3. Considere o fluxo em \mathbb{R}^2 como na Figura 1.2. Veja que p é uma singularidade do fluxo e o conjunto ω -limite do ponto $q \neq p$ é formado pela união das órbitas $\mathcal{O}(a)$ e $\mathcal{O}(b)$. Note que $\omega(q)$ é desconexo. \triangle

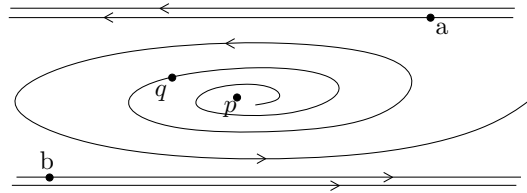


Figura 1.2: O conjunto ω -limite de q não é conexo.

1.2 Preliminares Algébricas

Dois dos principais assuntos deste trabalho são o índice de Conley e a matriz de conexão. Estas duas ferramentas serão definidas de forma puramente algébrica em capítulos posteriores. Esta seção apresenta alguns pré-requisitos da álgebra e da topologia algébrica necessários para a definição das ferramentas supracitadas.

As principais referências para esta seção são: [17] e [22].

1.2.1 Homologia Singular

O propósito desta seção é fazer uma breve revisão sobre a teoria de homologia singular para espaços topológicos arbitrários. Serão definidos os elementos essenciais para a obtenção da homologia de um espaço topológico, assim como para a homologia de um complexo de cadeia. Em seguida será visto que a homologia de um espaço topológico é um caso particular de homologia de um complexo de cadeia.

O elemento básico da teoria de homologia é o *simplexo*, conceito que será definido agora.

Definição 1.6. Um *p -simplexo* em \mathbb{R}^n é o fecho convexo de $p + 1$ pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ de \mathbb{R}^n , de modo que $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ formam um conjunto linearmente independente. Os pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ são chamados de *vértices* do *p -simplexo*.

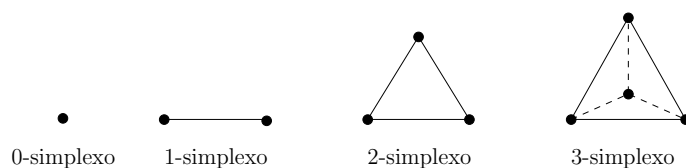


Figura 1.3: Exemplos de simplexos em \mathbb{R}^3 .

O n -simplexo em \mathbb{R}^{n+1} cujos vértices são os pontos

$$x_0 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad x_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

é chamado de *n -simplexo padrão* em \mathbb{R}^n e denotado por σ_n . O n -simplexo padrão pode ser visto analiticamente por:

$$\sigma_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 \ \forall i \text{ e } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

A partir do n -simplexo padrão em \mathbb{R}^n estende-se o conceito de simplexo para espaços topológicos mais gerais. Ao longo desta seção, considere X um espaço topológico arbitrário.

Definição 1.7. Um *n -simplexo* no espaço topológico X é uma função contínua da forma

$$\rho : \sigma_n \longrightarrow X,$$

onde σ_n é o n -simplexo padrão em \mathbb{R}^n .

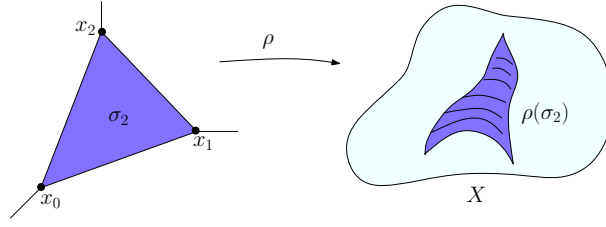


Figura 1.4: Representação de um 2-simplexo em X .

Como σ_0 é um conjunto formado por um ponto e σ_1 é um intervalo fechado, um 0-simplexo em X pode ser identificado com um ponto de X e um 1-simplexo com um caminho em X .

Definição 1.8. *Seja X um espaço topológico. Para cada $n \geq 0$, defina $C_n(X)$ como o grupo abeliano livre cuja base consiste de todos os n -simplexos de X . Cada elemento de $C_n(X)$ é chamado de n -cadeia de X e tem a forma*

$$\sum_{\rho} n_{\rho} \rho,$$

onde $n_{\rho} \in \mathbb{Z}$ são quase todos nulos e cada ρ é um n -simplexo singular de X .

Com a finalidade de definir aplicação bordo, é necessário formalizar o conceito de faces de um simplexo.

Definição 1.9. *Seja ρ um n -simplexo em X , com $n > 0$ e seja $i \in \{0, \dots, n\}$. A i -ésima face de ρ é o $(n-1)$ -simplexo de X dado por*

$$\begin{aligned} \partial_i \rho : \sigma_{n-1} &\longrightarrow X \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\longrightarrow \rho(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

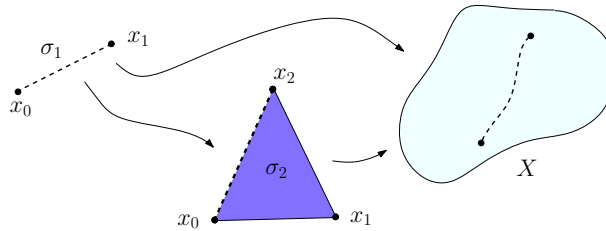


Figura 1.5: Primeira face de ρ .

Na prática, $\partial_i \rho$ despreza a contribuição na direção de x_i para depois aplicar ρ , ou seja, para calcular a i -ésima face de $\partial_i \rho$ basta mergulhar σ_{n-1} em σ_n de forma oposta ao vértice

x_i e então ir para X via ρ . Por exemplo, considere o 2-simplexo ρ da Figura 1.4, a primeira face de ρ é dada pela composição mostrada na Figura 1.5.

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, o i -ésimo operador ∂_i dado pela Definição 1.9 é uma função que tem como domínio o conjunto dos n -simplexos de X e como contra-domínio o conjunto dos $(n-1)$ -simplexos de X . Como $C_n(X)$ é o conjunto das n -cadeias de X , ou seja, é o conjunto gerado pelos n -simplexos de X , o operador ∂_i pode ser estendido para o homomorfismo $\partial_i : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ da seguinte forma:

$$\partial_i \left(\sum_{\rho} n_{\rho} \rho \right) = \sum_{\rho} n_{\rho} \partial_i \rho.$$

Agora, segue a definição de operador bordo:

Definição 1.10. *Defina a **aplicação bordo** como sendo o homomorfismo*

$$\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

dado por

$$\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n.$$

A aplicação bordo também é chamada de operador bordo. É comum denotar por ∂_n a aplicação bordo ∂ que tem $C_n(X)$ como domínio.

O próximo teorema é fundamental para o desenvolvimento da teoria de homologia singular.

Teorema 1.1. *A composição $\partial \circ \partial$*

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-2}(X)$$

é a aplicação nula.

A demonstração deste teorema é simples e encontra-se em [22].

Do ponto de vista geométrico, o Teorema 1.1 afirma que o bordo de qualquer n -cadeia é uma $(n-1)$ -cadeia sem bordo. Esta é a propriedade básica que leva à definição de grupo de homologia. Antes de definir grupo de homologia é necessário destacar dois tipos de cadeias: os ciclos e os bordos.

Definição 1.11. Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -**ciclo** se $\partial_n c = 0$, ou seja, se $c \in \ker \partial_n$, onde $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$. O conjunto de todos os n -ciclos de X é denotado por $Z_n(X)$.

É convenção considerar toda 0-cadeia como um 0-ciclo.

Definição 1.12. Uma n -cadeia $c \in C_n(X)$ é um n -**bordo** se existe $d \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1} d = c$, ou seja, se $c \in \operatorname{im} \partial_{n+1}$, onde $\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$. O conjunto de todos os n -bordos de X é denotado por $B_n(X)$.

Sendo ∂ um homomorfismo, $\ker \partial_n = Z_n(X)$ e $\operatorname{im} \partial_{n+1} = B_n(X)$ são subgrupos abelianos de $C_n(X)$. Além disso, o Teorema 1.1 implica que $B_n(X) \subset Z_n(X)$. Deste modo está bem definido o grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$, este grupo é o n -ésimo grupo de homologia de X .

Definição 1.13. Para cada $n \geq 0$, o n -ésimo **grupo de homologia singular** do espaço topológico X é o grupo abeliano

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

Se $c \in Z_n(X)$ então o conjunto $c + B_n(X)$ é a classe de homologia de c . Note que $c + B_n(X)$, $d + B_n(X) \in H_n(X)$ são iguais quando $c - d \in B_n(X)$, ou seja, quando a diferença entre os n -ciclos c e d forma o bordo de uma $(n+1)$ -cadeia de X . Neste caso, c e d são ditos **ciclos homólogos**.

Em particular, todos os n -bordos de X são condensados no elemento nulo de $H_n(X)$. Portanto, a existência de elementos não nulos nas homologias de X detectam a existência de ciclos de X que não são bordos em X .

Agora, o objetivo é generalizar a Definição 1.13. Para isto, serão introduzidos os conceitos de grupo abeliano graduado e complexo de cadeia.

Definição 1.14. Um **grupo abeliano graduado** G é uma coleção de grupos abelianos $\{G_i\}$ indexada pelos inteiros ou pelos naturais e com operação componente a componente. Se G e G' são grupos abelianos graduados então um **homomorfismo de grau** $r \in \mathbb{Z}$

$$f : G \longrightarrow G'$$

é uma coleção de homomorfismos f_i , onde

$$f_i : G_i \longrightarrow G'_{i+r}.$$

Um **subgrupo** $H \subset G$ de um grupo graduado é um grupo graduado $\{H_i\}$, onde cada H_i é um subgrupo de G_i .

Se H é um subgrupo graduado de G então o **grupo quociente** G/H é o grupo graduado $\{G_i/H_i\}$.

Dado um espaço topológico X , a coleção de grupos abelianos $C_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um exemplo de grupo graduado.

Definição 1.15. Um **complexo de cadeia** é uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

tal que a composição $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, para todo n . Equivalentemente, um complexo de cadeia é um grupo graduado $C = \{C_n\}$ juntamente com um homomorfismo $\partial : C \rightarrow C$ de grau -1 tal que $\partial \circ \partial = 0$.

A notação usual para um complexo de cadeia é (C, ∂) , e o homomorfismo ∂ é chamado de diferencial do complexo de cadeia, ou até mesmo de aplicação bordo.

Considerando o grupo graduado $C_*(X) = \{C_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, onde $C_n(X) = 0$ para todo $n < 0$, juntamente com o homomorfismo $\partial = \{\partial_n\}$, onde cada $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ é o homomorfismo da Definição 1.10. Então $(C_*(X), \partial)$ é um complexo de cadeia.

Seja $(C, \partial) = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ um complexo de cadeia e, para cada n , denote por $Z_n(C)$ e $B_n(C)$ o $\ker \partial_n$ e $\text{im } \partial_{n+1}$, respectivamente. Fixe as notações $Z_*(C)$ e $B_*(C)$ para representarem respectivamente os grupos graduados $\{Z_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{B_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Definição 1.16. O n -ésimo grupo de homologia singular do complexo de cadeia (C, ∂) é o grupo

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

O grupo graduado $H_*(C) = \{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é a **homologia do complexo de cadeia** (C, ∂) .

Observe que o n -ésimo grupo de homologia do espaço topológico X , definida anteriormente por

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\ker \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}},$$

é exatamente o n -ésimo grupo de homologia do complexo de cadeia $(C_*(X), \partial) = \{C_n(X), \partial_n\}$, onde $\partial = \{\partial_n\}$ é o operador bordo apresentado na Definição 1.10. Por esta razão, a Definição 1.16 generaliza a Definição 1.13.

O grupo graduado $H_*(X) = \{H_n(C_*(X))\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formado pelos n -ésimos grupos de homologias do complexo de cadeia $(C_*(X), \partial)$ é normalmente chamado de homologia do espaço topológico X .

Esta subseção finaliza com um breve estudo das aplicações de cadeia.

Definição 1.17. *Dados dois complexos de cadeia (C, ∂) e (C', ∂') , uma aplicação de cadeia $\Phi = \{\Phi_n\} : C \rightarrow C'$ é um homomorfismo de grau zero² que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\Phi_n} & C'_n \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{\Phi_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

para todo n , ou seja,

$$\partial'_n \circ \Phi_n = \Phi_{n-1} \circ \partial_n.$$

É fácil verificar que se Φ é uma aplicação de cadeia então

$$\Phi(Z_*(C)) \subset Z_*(C') \quad \text{e} \quad \Phi(B_*(C)) \subset B_*(C'). \quad (1.1)$$

As inclusões em (1.1), garante que Φ induz um homomorfismo de grau 0 entre os grupos de homologia dos complexos (C, ∂) e (C', ∂') dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_* : H_*(C) &\longrightarrow H_*(C') \\ a + B_*(C) &\longmapsto \Phi(a) + B_*(C') \end{aligned}$$

Assim, toda aplicação de cadeia induz uma aplicação entre as homologias dos complexos de cadeia.

Dados dois espaços topológicos X e Y e uma função contínua $f : X \rightarrow Y$, o objetivo agora é definir uma aplicação de cadeia entre $C_*(X)$ e $C_*(Y)$. Seja $\rho : \sigma_n \rightarrow X$ um n -simplexo em X , então

$$f_{\#}\rho := f \circ \rho : \sigma_n \longrightarrow Y$$

é um n -simplexo em Y . Logo, $f_{\#}$ pode ser visto como uma aplicação que leva n -simplexos de X para n -simplexos de Y .

²A hipótese de que Φ tenha grau 0 é desnecessária. Aqui se exige que a aplicação de cadeia tenha grau 0 apenas por conveniência, já que todas as aplicações cadeias consideradas neste trabalho têm este grau.

Sendo $C_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelos n -simplexos de X , $f_\#$ pode ser estendida de maneira única para o homomorfismo

$$f_\# : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y).$$

Veja que variando n nos inteiros, obtém-se uma coleção de homomorfismo que, por simplicidade, também será denotada por $f_\#$. Pode-se mostrar que o diagrama abaixo comuta para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_\#} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Ou seja, $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ é uma aplicação de cadeia.

Sendo uma aplicação de cadeia, $f_\#$ induz um homomorfismo entre as homologias dos espaços X e Y , dado por

$$\begin{aligned} f_* : H_*(X) &\longrightarrow H_*(Y) \\ a + B_*(X) &\longmapsto f_\#(a) + B_*(Y) \end{aligned}$$

Desta maneira, uma aplicação contínua entre espaços topológicos $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação $f_\#$ entre os complexos de cadeia $C_*(X)$ e $C_*(Y)$ que, por sua vez, induz um homomorfismo entre as homologias $H_*(X)$ e $H_*(Y)$. (Estas notações serão importantes em capítulos posteriores.)

O próximo resultado será bastante utilizado ao longo do trabalho:

Teorema 1.2. *Sejam X e Y espaços topológicos homotopicamente equivalentes e sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ aplicações contínuas tais que $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ e $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$, então $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ é um isomorfismo.³*

1.2.2 Sequências Exatas

Esta subseção preocupa-se em apresentar definições e resultados referentes às sequências exatas que serão essenciais para o bom entendimento dos capítulos posteriores.

³O início da seção 3.1 contém um resumo da teoria de homotopia.

Definição 1.18. Uma tripla $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ de grupos abelianos e homomorfismos é exata se $\text{im } f = \ker g$. Uma sequência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \longrightarrow G_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

é chamada de **sequência longa exata** se cada tripla é exata, ou seja, se $\text{im } f_n = \ker f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência exata do tipo

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

é chamada de **sequência exata curta**.

Como resultados imediatos das definições acima segue a proposição:

Proposição 1.2. 1. Uma sequência do tipo $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um monomorfismo e g é epimorfismo.

2. Uma sequência do tipo $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um isomorfismo.

3. Uma sequência do tipo $0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, $C = 0$

A demonstração desta proposição segue imediatamente da definição de exatidão de uma sequência.

A noção de sequência exata de grupos abelianos e homomorfismos pode ser generalizada para complexos de cadeia. Como é apresentado a seguir:

Definição 1.19. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, seja $C^i = \{C_k^i\}_{k \in \mathbb{Z}}$ um grupo abeliano graduado e seja $f^i = \{f_k^i\}_{k \in \mathbb{Z}} : C^i \rightarrow C^{i+1}$ uma aplicação de grau zero. A sequência

$$\cdots \longrightarrow C^1 \xrightarrow{f^1} C^2 \xrightarrow{f^2} C^3 \xrightarrow{f^3} \cdots \longrightarrow C^n \xrightarrow{f^n} \cdots$$

é uma **sequência longa exata de grupos graduados** se, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a sequência de grupos

$$\cdots \longrightarrow C_k^1 \xrightarrow{f_k^1} C_k^2 \xrightarrow{f_k^2} C_k^3 \xrightarrow{f_k^3} \cdots \longrightarrow C_k^n \xrightarrow{f_k^n} \cdots$$

é exata.

Sejam $(C, \partial) = \{(C_n, \partial_n)\}$, $(D, \partial') = \{(D_n, \partial'_n)\}$ e $(E, \partial'') = \{(E_n, \partial''_n)\}$ complexos de cadeia e $f : C \rightarrow D$ e $g : D \rightarrow E$ aplicações de cadeia de grau zero. Uma sequência exata de complexos de cadeia da forma

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0,$$

que também é chamada de **sequência exata curta de complexos de cadeia**, pode ser representada por um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' & \\ 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f} & D_n & \xrightarrow{g} & E_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f} & D_{n-1} & \xrightarrow{g} & E_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial' & & \downarrow \partial'' \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

onde as linhas são sequências exatas curtas de grupos abelianos e cada quadrado é comutativo, já que f e g são aplicações de cadeia.

Sendo f e g aplicações de cadeia, cada uma induz um homomorfismo em homologia $f_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D)$ e $g_* : H_*(D) \rightarrow H_*(E)$. O próximo resultado garante que existe um homomorfismo $\partial_* : H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ de grau -1 , além de garantir que sempre é possível associar a uma sequência exata curta de complexos de cadeia uma sequência longa exata em homologia.

Teorema 1.3. *Se*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0 \quad (1.2)$$

*é uma sequência exata curta de complexos de cadeia, então existe um **homomorfismo de conexão** $\partial_* : H_*(E) \rightarrow H_*(C)$ de grau -1 , tal que a sequência longa*

$$\cdots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots \quad (1.3)$$

é exata.

Muitas vezes refere-se à sequência (1.3) como a sequência exata em homologia induzida por (1.2).

O próximo teorema será utilizado no Capítulo 4, sua demonstração encontra-se em [17].

Teorema 1.4 (*Five Lemma*). *Considere o diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

onde A_i e B_i são grupos abelianos, e f_i são homomorfismos, para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$. Se f_1, f_2, f_4, f_5 são isomorfismos então f_3 também é isomorfismo.

1.2.3 Homologia Relativa

Para finalizar esta seção de preliminares algébricas, será apresentando de forma breve o conceito de homologia relativa.

Dado um espaço topológico X e um subespaço $A \subset X$, denote por $C_n(X, A)$ o grupo quociente $C_n(X)/C_n(A)$. Veja que as cadeias em A são triviais em $C_n(X, A)$. Como a aplicação bordo $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ leva $C_n(A)$ em $C_{n-1}(A)$, esta induz uma aplicação bordo no quociente $\partial' : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ dada por:

$$c + C_n(A) \xrightarrow{\partial'_n} \partial_n(c) + C_{n-1}(A).$$

Assim, $(C_*(X, A), \partial')$ é um complexo de cadeia.

Definição 1.20. *Seja A é um subespaço de X , o n -ésimo grupo de homologia relativa $H_n(X, A)$ é definido como sendo o grupo de homologia $H_n(C_*(X)/C_*(A))$.*

Abaixo são listados alguns resultados de homologia relativa que serão usados ao longo deste trabalho. As demonstrações de tais resultados podem ser encontradas na referência [17].

Se A é um subespaço de X então tem-se a sequência exata curta de complexos de cadeia

$$0 \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{i_\#} C_*(X) \xrightarrow{p_\#} C_*(X)/C_*(A) \longrightarrow 0$$

onde $i : A \rightarrow X$ é a inclusão canônica.

Os próximos dois teoremas, cujas demonstrações são omitidas, são importantes para a teoria desenvolvida no Capítulo 4.

Teorema 1.5 (*Sequência Exata do par* (X, A)). Se A é um subespaço de X , então existe uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Teorema 1.6 (*Sequência Exata da tripla* (X, A, A')). Se $A' \subset A \subset X$ são subespaços, então existe uma sequência longa exata

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, A') \longrightarrow H_n(X, A') \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, A') \longrightarrow \cdots$$

As demonstrações dos teoremas 1.5 e 1.6 podem ser encontradas na referência [17].

Observação 1.1. Existe uma generalização da teoria de homologia que foi desenvolvida até aqui que se comporta de maneira muito similar e, por vezes, oferece vantagens técnicas. Esta generalização, chamada de **homologia com coeficientes**, consiste no uso de cadeias da forma

$$\sum_i n_i \rho_i,$$

onde cada ρ_i é um n -simplexo singular em X , como anteriormente, mas ao invés dos coeficientes serem tomados em \mathbb{Z} estes são tomados em um grupo abeliano G fixado previamente. Tais n -cadeias formam um grupo abeliano $C_n(X; G)$ e ainda existe uma versão relativa $C_n(X, A; G) = C_n(X; G)/C_n(A; G)$.

A fórmula para o operador bordo ∂ é a mesma que a definida anteriormente, ou seja,

$$\partial \left(\sum_i n_i \rho_i \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \partial_j \left(\sum_i n_i \rho_i \right).$$

Como anteriormente, um cálculo simples mostra que $\partial^2 = 0$, portanto os grupos $C_n(X; G)$ e $C_n(X, A; G)$ formam complexos de cadeia. O grupo de homologia resultante $H_n(X; G)$ e $H_n(X, A; G)$ são chamados de **grupos de homologia com coeficientes em G** .

1.3 Função de Morse

No Capítulo 2 trabalha-se com fluxos gradientes oriundos de uma função de Morse definida sobre uma variedade. Como base para o estudo feito no capítulo citado, esta seção

aborda de maneira sucinta elementos básicos da teoria de Morse.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $p \in M$ é chamado de **ponto crítico** de f se a aplicação induzida $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ nos espaços tangentes for a aplicação nula. Escolhido um sistema de coordenadas locais $\phi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em torno de p , isto significa que

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = \dots = \frac{\partial}{\partial x^n}(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) = 0.$$

O número $f(p)$ é chamado de **valor crítico** de f .

Denote o conjunto de pontos críticos de f por:

$$\text{Crit}(f) = \{p \in M : df_p = 0\}.$$

Para cada $p \in \text{Crit}(f)$, escolha coordenadas locais $\phi = (x^1, \dots, x^n) : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e defina a forma bilinear simétrica em $T_p M$, chamada a **Hessiana** de f no ponto p , por

$$H_p^f(\xi, \eta) := \sum_{i,j=1}^n S_{ij} \xi^i \eta^j, \quad S_{ij} = S_{ij}(f, p; \phi) := \left(\frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i \partial u^j} \phi(p) \right)$$

Um ponto crítico p é chamado **ponto não-degenerado** se, e somente se, a matriz Hessiana de f no ponto p

$$H_p^f = \left(\frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i \partial u^j} \phi(p) \right)$$

é não-singular, ou seja, inversível.

O número de autovalores negativos de H_p^f é definido como sendo o **índice de Morse** de p e denotado por $\text{ind}_f(p)$. Defina $E^u(p)$ sendo a soma dos autoespaços associados aos autovalores negativos de H_p^f e $E^s(p)$ a soma dos autoespaços associados aos autovalores positivos de H_p^f .

Pode ser verificado que, para um ponto $p \in \text{Crit}(f)$, a noção de Hessiana, índice de Morse e ponto não-degenerado não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Lema 1.1 (Lema de Morse). *Seja p um ponto crítico não-degenerado de f . Então existe um sistema de coordenadas locais $\phi = (y_1, \dots, y_n)$ em uma vizinhança U de p tal que*

1. $\phi(p) = (y_1(p), \dots, y_n(p)) = 0$;
2. $(f \circ \phi^{-1})(y_1, \dots, y_n) = f(p) - (y_1)^2 - \dots - (y_\lambda)^2 + (y_{\lambda+1})^2 + \dots + (y_n)^2$ vale para todo U ,

e λ é o índice de Morse de f no ponto p .

A demonstração deste lema encontra-se na referência [11].

Corolário 1.1. *Os pontos críticos não-degenerados de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são isolados.*

Demonstração: Seja $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas em torno de p tal que $\phi(p) = 0$. Considere a aplicação $C^\infty g : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \phi^{-1})(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f \circ \phi^{-1})(x) \right).$$

Tem-se que $g(0) = 0$ e a matriz Hessiana H_x^f é não singular. Pelo Teorema da Função Inversa, g é um difeomorfismo de uma vizinhança U_0 de 0 para outra vizinhança U'_0 de 0. Em particular, g é injetiva em U_0 , ou seja, para todo $x \in U_0 \setminus \{0\}$, $g(x) \neq g(0) = 0$. Portanto, x não é ponto crítico de f . \square

Definição 1.21. *Uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função de Morse** se todos os seus pontos críticos são não degenerados.*⁴

Exemplo 1.4. Considere a esfera de dimensão n

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

e a função $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. A função f é uma função de Morse em S^n que possui apenas dois pontos críticos: o polo norte $N = (0, \dots, 0, +1)$ e o polo sul $S = (0, \dots, 0, -1)$. (Veja Figura 1.6.) Os pontos críticos N e S são ambos não-degenerados e seus índices de Morse são $\text{ind}_f(N) = n$ e $\text{ind}_f(S) = 0$, respectivamente. \triangle

Exemplo 1.5. A função $g = f^2 : S^2 \rightarrow [0, 1]$ possui uma quantidade infinita de pontos críticos. (Veja Figura 1.7.) O polo Norte N , o polo sul S e qualquer ponto do equador

$$E = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} = 0\}$$

são pontos críticos de f . Logo, f não é uma função de Morse. \triangle

⁴Aqui é permitido que dois pontos críticos p e q estejam em um mesmo nível, ou seja, que $f(p) = f(q)$.

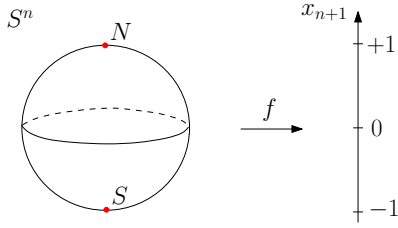
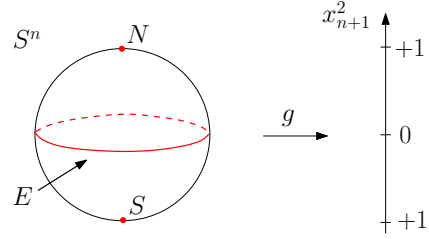
Figura 1.6: Função de Morse em S^n .

Figura 1.7: Função com ponto degenerado.

Corolário 1.2. Se M é uma variedade compacta e fechada e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, então $\#Crit(f) < \infty$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que a cardinalidade de $Crit(f)$ não é finita. Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos críticos distintos de f . Pela compacidade de M , tal sequência possui subsequência que converge, digamos, ao ponto x . Pela continuidade da diferencial de f , segue que $x \in Crit(f)$. Sendo f é uma função de Morse, x é ponto crítico não-degenerado, contradizendo o Corolário (1.1). \square

O próximo teorema garante que não se perde muito em restringir o estudo às funções de Morse.

Teorema 1.7. Se M é uma variedade fechada, então o conjunto das funções de Morse é aberto e denso em $C^1(M, \mathbb{R})$.

Para a demonstração deste teorema veja a referência [1].

Outro resultado da teoria de Morse que vale a pena destacar são as desigualdades de Morse.

Seja M uma variedade compacta e suave de dimensão n e \mathbb{F} um corpo. Então $H_k(M; \mathbb{F})$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} , e o k -ésimo número de Betti de M , denotado por $b_k(\mathbb{F})$, é definido como sendo a dimensão de $H_k(M; \mathbb{F})$. Agora, se $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ então $b_k(\mathbb{Z})$ é definido como sendo o rank da parte livre de $H_k(M; \mathbb{Z})$. A notação para o k -ésimo número de Betti quando $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ é apenas b_k .

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, e seja c_k o número de pontos críticos de f de índice k , para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Seja \mathbb{F} um corpo, pode-se mostrar que:

$$c_k \geq b_k(\mathbb{F}), \quad (1.4)$$

para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. As desigualdades em 1.4 são conhecidas como desigualdades fracas de Morse. Em particular, estas desigualdades implicam que o número total de pontos críticos de f é maior ou igual que a soma dos números de Betti,

$$\sum_{k=0}^n c_k \geq \sum_{k=0}^n b_k(\mathbb{F}).$$

Observe ainda que c_k depende apenas da função de Morse (e não de \mathbb{F}), e $b_k(\mathbb{F})$ depende apenas da topologia de M e de \mathbb{F} , mas não da função de Morse. As conhecidas desigualdades fortes de Morse fornecem mais relações entre c_k e $b_k(\mathbb{F})$:

Teorema 1.8. *Dada uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, onde M é uma variedade compacta e suave de dimensão n , tem-se*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} c_k \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} b_k(\mathbb{F}),$$

para todo $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. E a igualdade é garantida quando $m = n$.

O Teorema 1.8 mostra que a característica de Euler, $\chi(M) = \sum_{k=0}^n b_k(\mathbb{F})$, independe do corpo \mathbb{F} . Além disso, se $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$, então vale resultado análogo sobre os números de Betti b_k . Este fato pode ser visto como corolário do Teorema dos Coeficientes Universais em homologia.

Capítulo 2

O Complexo de Morse-Witten

Este capítulo tem como base a teoria de Morse. Uma motivação para o estudo da teoria de Morse é o carácter interdisciplinar que esta possui, pois esta teoria contém ideias de longo alcance que relacionam análise, geometria diferencial, topologia algébrica e mais recentemente física-matemática. A essência da teoria clássica de Morse é uma coleção de teoremas que descrevem de forma simples e elegante a relação entre a topologia de uma variedade M e a estrutura dos pontos críticos de uma função de Morse em M (veja [11]).

Na abordagem clássica da teoria de Morse, o aspecto dinâmico do campo gradiente de f não é completamente explorado. Alguns resultados principais desta teoria são recuperados através do estudo da homologia de Morse. Este capítulo tem como tema central o complexo de Morse-Witten (que dá origem à homologia de Morse).

Uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade Riemanniana suave e fechada (M, g) dá origem a um complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$, chamado de complexo de Morse-Witten, cujos grupos de cadeias são gerados pelos pontos críticos de f e cujo operador bordo é definido por uma contagem algébrica do número de linhas de fluxo, contadas com sinal, associado ao campo $-\nabla f$.

O Teorema da Homologia de Morse (Teorema 2.10) afirma que a homologia do complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é isomorfa à homologia singular da variedade M com coeficientes inteiros.

As ideias básicas envolvendo o complexo de Morse-Witten foram desenvolvidas durante a primeira metade do século XX , assim como várias versões de homologia de Morse para o caso de dimensão infinita, como por exemplo homologia de Floer, que continua até hoje a ser de interesse de pesquisadores nas áreas de matemática e física teórica.

Durante os anos 50, Smale encontra a condição para a dinâmica do campo gradiente, a qual é chamada de *condição de Morse-Smale* e que fornece os ingredientes necessários para o estudo da homologia de Morse. Diz-se que uma função f satisfaz a condição de Morse-Smale quando as variedades estáveis e instáveis dos pontos críticos de f interceptam-se transversalmente.

As inspirações finais para a criação da homologia de Morse foram fornecidas pelos trabalhos de Witten e de Floer com o propósito de achar uma prova para a conjectura de Arnold. A conjectura de Arnold (1966) diz que o número mínimo de pontos fixos de um difeomorfismo simplético exato sobre uma variedade simplética M é a soma dos números de Betti de M , desde que todos os seus pontos fixos sejam não degenerados.

No início de 1990 surgiram várias abordagens para tornar rigorosa a ideia do complexo de Morse-Witten e a homologia de Morse, oriunda deste complexo, emergiu. A abordagem de Floer e Salamon [19] é via teoria do índice de Conley. A abordagem adotada por Schwarz é considerando a equação do gradiente negativo, no espírito da teoria de Floer, como uma secção em um fibrado de Banach apropriado sobre os conjuntos de caminhos em M . Uma terceira abordagem é através do ponto de vista de sistemas dinâmicos, a saber via intersecção da variedades estáveis e instáveis. Weber em [23] utiliza essa abordagem que também será usada neste capítulo.

Para uma história mais detalhada do surgimento da homologia de Morse veja [3].

As principais referências para a construção do complexo de Morse-Witten apresentada neste capítulo são [1] e [23]. Para questões envolvendo sistemas dinâmicos a referência básica é [15].

2.1 Fluxos Gradientes

Esta seção trata dos fluxos gradientes negativos, os quais possuem várias propriedades interessantes. São definidos os conceitos de variedade estável e variedade instável, essenciais para a construção do complexo de Morse-Witten.

Ao longo deste capítulo, fixe M uma variedade Riemanniana suave e fechada¹ de dimensão finita n , g uma métrica Riemanniana em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. A identidade

$$g(\nabla f, \cdot) = df(\cdot)$$

¹Compacta e sem bordo.

determina unicamente o campo vetorial gradiente ∇f sobre M . O fluxo associado ao campo gradiente negativo $-\nabla f$ é chamado de **fluxo gradiente negativo**.

Se γ é uma trajetória do fluxo gradiente negativo, então:

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = g(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = -|\nabla f(\gamma(t))|^2 \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Isto mostra que f decresce ao longo de órbitas não singulares. Logo, órbitas fechadas não podem existir e qualquer órbita regular $\mathcal{O}(q)$ intersecta o conjunto de nível $f^{-1}(f(q))$ no máximo uma vez. Além disso, tal intersecção é ortogonal com respeito à métrica g . Usando estas propriedades tem-se a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Seja φ o fluxo associado ao campo vetorial $-\nabla f$. Para todo $p \in M$ tem-se que $\omega^*(p) \cup \omega(p) \subset \text{Crit}(f)$.*

Demonstração: A ideia da demonstração é supor por absurdo que existe $q \in \omega(p)$ tal que $\nabla f(q) \neq 0$, para algum $q \in M$. Seja S a intersecção de $f^{-1}(f(q))$ com uma vizinhança suficientemente pequena de q . Veja que S é uma subvariedade de dimensão $n - 1$ ortogonal a $\text{grad}(f)$ e, pela continuidade do fluxo, a órbita de qualquer ponto suficientemente próximo de q intersecta S . Como $q \in \omega(p)$, existe uma sequência $p_n \in \mathcal{O}(p)$ convergindo para q . Daí, a órbita de p intersecta S em mais de um ponto (de fato, em infinitos pontos), o que é um absurdo já que f decresce ao longo das órbitas regulares. \square

Além disso, se o ω -limite de uma órbita de um fluxo gradiente negativo contém mais de uma singularidade, então deve conter infinitas singularidades. Para mais detalhes veja [15].

A partir de agora, assuma que o fluxo gradiente negativo é gerado por uma função de Morse f . Assim, a proposição seguinte segue imediatamente do Corolário 1.1 e da observação feita logo acima.

Proposição 2.2. *Seja M uma variedade fechada de dimensão finita e φ o fluxo associado ao campo vetorial $-\nabla f$, onde f é uma função de Morse. Então $\omega^*(q)$ e $\omega(q)$ consistem cada um de apenas um ponto crítico de f , para todo $q \in M$.*

Definição 2.1. *Dado $x \in \text{Crit}(f)$, a **variedade estável** de x é definida por*

$$W^s(x) := \{q \in M \mid \omega(q) = x\}.$$

E a *variedade instável*² de x :

$$W^u(x) := \{q \in M \mid \omega^*(q) = x\}.$$

O conjunto $W^s(x)$ é formado pelos pontos de M cujas órbitas “morrem” em x . Já o conjunto $W^u(x)$ é formado pelos pontos de M cujas órbitas “nascem” em x .

Note que, pela Proposição 2.2, cada ponto de M pertence à variedade estável de algum ponto crítico de f ; da mesma forma, cada ponto de M está na variedade instável de algum ponto crítico de f . Segue que uma função de Morse f sobre M fornece duas decomposições de M , uma como coleção das variedades estáveis e outra como coleção das variedades instáveis dos pontos críticos de f :

$$M = \bigcup_{x \in \text{Crit}(f)} W^s(x) = \bigcup_{x \in \text{Crit}(f)} W^u(x). \quad (2.1)$$

Ainda pela Proposição 2.2, as uniões acima são uniões disjuntas.

O termo “variedade” na definição acima é justificado pelo próximo teorema, que garante que $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são variedades, para todo $x \in \text{Crit}(f)$.

Teorema 2.1 (Teorema da Variedade Estável/Instável). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse em uma variedade Riemanniana (M, g) suave e fechada de dimensão finita n . Se $x \in \text{Crit}(f)$ então $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são subvariedades de M sem fronteira e seus espaços tangentes em x são dados pelos espaços estável e instável da linearização de f em x , ou seja, $E^s(x)$ e $E^u(x)$, respectivamente. Além disso, o espaço tangente de M em x se decompõe como*

$$T_x M = T_x W^s(x) \oplus T_x W^u(x).$$

Embora, para o caso geral de um campo vetorial com singularidades hiperbólicas, estas variedades sejam apenas imersas injetivamente, no caso Morse, elas são mergulhadas. De fato, as variedades $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são imagens de mergulhos suaves de discos abertos de dimensões $n - \text{ind}_f(x)$ e $\text{ind}_f(x)$, respectivamente, ou seja, $\dim(W^u(x)) = \text{ind}_f(x)$ e $\dim(W^s(x)) = n - \text{ind}_f(x)$.

Na próxima seção, será abordada a orientabilidade da variedade estável e da variedade instável. A observação a seguir será de extrema importância neste contexto.

²A nomenclatura está relacionada aos termos em inglês “unstable” (instável) e “stable” (estável).

Observação 2.1. Pela Proposição 2.2, tem-se que $\omega(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q)$. A função

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times W^s(x) &\longrightarrow W^s(x) \\ (t, q) &\longmapsto \varphi_{\frac{t}{1-t}}(q) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre a identidade em $W^s(x)$ e a aplicação constante $q \mapsto x$. Daí, a variedade estável de x é contrátil. Analogamente, a variedade instável de x é contrátil.

2.2 Órbitas Conectantes

Fixados $x, y \in \text{Crit}(f)$, defina a **variedade conectante** entre x e y por:

$$\mathcal{M}_{xy} := \mathcal{M}_{xy}(f, g) := W^u(x) \cap W^s(y).$$

O conjunto \mathcal{M}_{xy} é formado por linhas de fluxo de acordo com sua “origem” e seu “destino”, ou seja, \mathcal{M}_{xy} é o espaço de todos os pontos cujas órbitas começam em x e terminam em y . Em outras palavras, $a \in \mathcal{M}_{xy}$ se, e somente se, $\omega^*(\mathcal{O}(a)) = x$ e $\omega(\mathcal{O}(a)) = y$. O espaço \mathcal{M}_{xy} também é chamado de **espaço das linhas de fluxo** de x para y .

Seja a um valor regular entre $f(x)$ e $f(y)$. O **espaço das órbitas conectantes** entre x e y é definido por:

$$\widehat{\mathcal{M}}_{xy} := \widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a) := \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a). \quad (2.2)$$

Este conjunto é composto por um único representante de cada órbita do fluxo gradiente negativo de x para y , pois cada órbita intersecta a superfície de nível, $f^{-1}(a)$, no máximo em um ponto. De fato, $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é o **espaço moduli** das linhas de fluxo que conectam x a y .

Veja que, para duas escolhas diferentes de a , existe uma identificação natural entre os espaços $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}(f, g, a)$ correspondentes, a qual é dada pelo fluxo.

Estes dois espaços recém definidos serão de extrema importância para a definição do complexo de Morse-Witten. Para esclarecer melhor as definições acima, segue um exemplo.

Exemplo 2.1. Considere a esfera S^2 e o fluxo gradiente negativo gerado pela função altura f em S^2 , como na Figura 2.1. O fluxo em questão apresenta seis singularidades. Sendo a função altura uma função de Morse, estão bem definidos as variedades conectantes e os respectivos espaços moduli dos pontos críticos de f . Ainda na Figura 2.1, são indicados algumas variedades conectantes e espaços moduli.

Já na Figura 2.2 são exibidos alguns espaços moduli em relação a diferentes escolhas de níveis regulares. \triangle

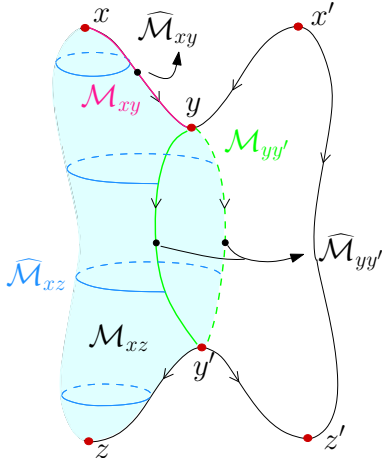


Figura 2.1: Exemplos de variedades conectantes e espaços moduli.

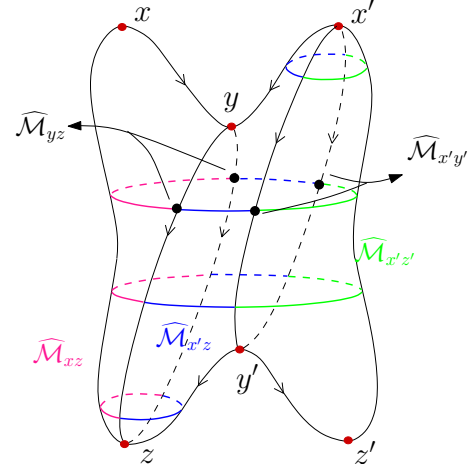


Figura 2.2: Exemplos de espaços moduli obtidos com diferentes escolhas de níveis.

Através das variedades instáveis e estáveis foram obtidas duas decomposições para M em (2.1). Uma decomposição mais fina para M é dada pelas variedades conectantes:

$$M = \bigcup_{x,y \in \text{Crit}(f)} \mathcal{M}_{xy} = \bigcup_{x,y \in \text{Crit}(f)} W^u(x) \cap W^s(y).$$

Note ainda que as uniões acima são disjuntas.

Em condições especiais sobre o fluxo gradiente negativo sobre uma variedade Riemanniana, as variedades conectantes e os espaços moduli apresentam propriedades significantes, de modo que permitem a definição do complexo de Morse-Witten. Esta seção é dividida em várias subseções, porém todas são dedicadas ao estudo das variedades conectantes e seus respectivos espaços moduli. Quando as variedades estáveis e instáveis dos pontos críticos de f são transversais, mostra-se que os espaços moduli de dimensão 1 são compactos, e os espaços moduli de dimensão maior são compactos por órbitas quebradas. Além disso, mostra-se que a variedade conectante e o espaço moduli são orientáveis.

2.2.1 Transversalidade

Subvariedades de uma dada variedade podem se intersectar de várias formas. Uma delas é a intersecção transversal que será introduzida agora. Para uma discussão mais abrangente do assunto veja [5] e [6].

De modo geral, diz-se que duas subvariedades A e B de M , com $\dim(M) < \infty$, se interceptam transversalmente (ou tem **intersecção transversal**), $A \pitchfork B$, se

$$T_q A + T_q B = T_q M, \text{ para todo } q \in A \cap B.$$

A soma acima não é direta, apenas soma de vetores um de cada espaço vetorial. Quando as subvariedades não se interceptam, diz-se que elas se interceptam transversalmente por vacuidade.

A intersecção de subvariedades, em geral, não é uma variedade. No entanto, se a intersecção é transversal então esta é ainda uma subvariedade. Além disso,

- $\text{codim}(A \cap B) = \text{codim}(A) + \text{codim}(B)$;
- $T_q(A \cap B) = T_q A \cap T_q B$.

Logo, se $A \pitchfork B$, tem-se:

$$\dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(M). \quad (2.3)$$

Diz-se que o campo vetorial gradiente $\nabla^g f$ satisfaz a **condição de Morse-Smale** se $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente para todos os pontos $x, y \in \text{Crit}(f)$. Neste caso, (g, f) é dito um **par Morse-Smale**, f é dita ser uma **função Morse-Smale** e o fluxo associado ao campo $-\nabla f$ é dito **fluxo Morse-Smale**.

Exemplo 2.2 (Toro Inclinado). Considere o toro bidimensional T sobre o plano $z = 0$ em \mathbb{R}^3 , como indicado na Figura 2.3, e a função $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela função altura com respeito as coordenadas do plano horizontal. Essa função é de Morse e admite 4 pontos críticos: um ponto repulsor x , dois pontos de sela y_1 e y_2 e um ponto atrator z , e seus respectivos índices de Morse são 2, 1, 1 e 0. Considere a métrica em T induzida pelo espaço euclidiano ambiente. O campo gradiente negativo oriundo desta função não é Morse-Smale, pois $W^u(y_1)$ e $W^s(y_2)$ se intersectam e tal intersecção não pode ser transversal. No entanto, a transversalidade

pode ser alcançada inclinando ligeiramente o toro como indicado na Figura 2.4, em outras palavras por uma perturbação de f que destrói a conexão entre os pontos de sela y_1 e y_2 . Δ

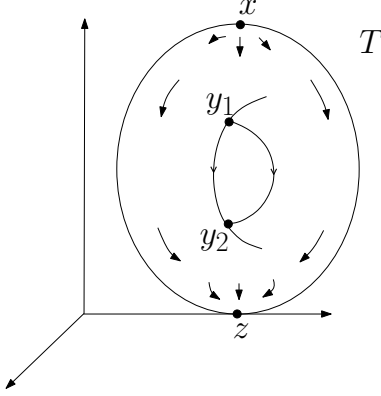


Figura 2.3: Fluxo não Morse-Smale.

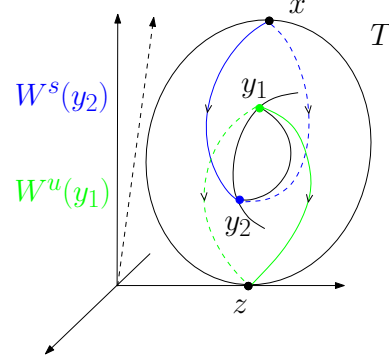


Figura 2.4: Fluxo Morse-Smale.

O próximo teorema garante que a condição de um campo ser Morse-Smale é uma condição genérica.

Teorema 2.2 (Transversalidade de Morse-Smale). *Seja (M, g) é uma variedade Riemanniana suave e compacta de dimensão finita, então o conjunto dos campos gradientes de classe C^r do tipo Morse-Smale é denso em $C^r(M, \mathbb{R})$.*

A prova do Teorema 2.2 pode ser encontrada em [1].

Pelo teorema acima, o campo $\nabla^g f$ pode ser aproximado em C^1 por um campo gradiente suave $\nabla^{\tilde{g}} \tilde{f}$ que satisfaz a condição Morse-Smale. De fato, \tilde{f} pode ser escolhido de forma que seu valor em qualquer ponto crítico seja igual ao índice de Morse do ponto crítico. Note que a métrica \tilde{g} não é, geralmente, próxima de g . Além disso, para uma função de Morse fixa, é possível obter transversalidade simplesmente por alterações na métrica.

Teorema 2.3. *Se o fluxo gradiente negativo é de Morse-Smale, então os espaços \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ são subvariedades de M sem fronteira e suas dimensões são dadas por:*

$$\dim(\mathcal{M}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) \quad \text{e} \quad \dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) - 1.$$

Além disso,

$$T_p \mathcal{M}_{xy} = T_p W^u(x) \cap T_p W^s(y) \quad \text{e} \quad T_p \widehat{\mathcal{M}}_{xy} = T_p W^u(x) \cap T_p W^s(y) \cap \nabla f(p)^\perp.$$

Demonstração: Como a intersecção de duas subvariedades transversais imersas é uma subvariedade imersa, sendo $\mathcal{M}_{xy} = W^u(x) \cap W^s(y)$ e $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$ então \mathcal{M}_{xy} é uma subvariedade de M ; e por (2.3), tem-se

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}_{xy}) &= \dim(W^u(x)) + \dim(W^s(y)) - \dim(M) \\ &= \operatorname{ind}_f(x) + (n - \operatorname{ind}_f(y)) - n \\ &= \operatorname{ind}_f(x) - \operatorname{ind}_f(y). \end{aligned}$$

Sendo o espaço tangente da intersecção de duas subvariedades, que se intersectam transversalmente, igual à intersecção dos espaços tangentes, segue a afirmação sobre $T_p\mathcal{M}_{xy}$.

Para calcular a $\dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy})$, note que $T_p f^{-1}(a) = \nabla(p)^\perp$ e $\nabla f(p)$ é tangente a \mathcal{M}_{xy} , portanto, \mathcal{M}_{xy} e $f^{-1}(a)$ são transversais. Disto seguem os resultados sobre o espaço tangente a $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ e sobre a dimensão:

$$\begin{aligned} \dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy}) &= \dim(\mathcal{M}_{xy}) + \dim(f^{-1}(a)) - \dim(M) \\ &= \operatorname{ind}_f(x) - \operatorname{ind}_f(y) + (n - 1) - n \\ &= \operatorname{ind}_f(x) - \operatorname{ind}_f(y) - 1. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *Se as variedades $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Se $\operatorname{ind}_f(x) < \operatorname{ind}_f(y)$, então $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$;
2. $\mathcal{M}_{xx} = \{x\}$;
3. Se $\operatorname{ind}_f(x) = \operatorname{ind}_f(y)$ e $x \neq y$, então $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$;
4. Se $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$ e $x \neq y$, então $\operatorname{ind}_f(x) > \operatorname{ind}_f(y)$.

Demonstração: 1) Segue diretamente da hipótese de transversalidade entre $W^u(x)$ e $W^s(y)$.

2) É claro que $x \in \mathcal{M}_{xx}$, pois $x \in W^s(x)$ e $x \in W^u(x)$. Se $q \in \mathcal{M}_{xx}$ e $q \neq x$, então q deve ser ponto não crítico, dando origem a uma órbita periódica, o que é impossível para fluxos gradientes.

3) Suponha, por absurdo, que existe $q \in \mathcal{M}_{xy}$. Então, \mathcal{M}_{xy} contém uma subvariedade 1-dimensional, a saber $\varphi(\mathbb{R}, q)$, o que contraria o fato de que $\dim(\mathcal{M}_{xy}) = 0$.

4) Suponha o contrário, que $\text{ind}_f(x) \leq \text{ind}_f(y)$. Se $\text{ind}_f(x) < \text{ind}_f(y)$, pelo primeiro item segue que $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$, absurdo. Se $\text{ind}_f(x) = \text{ind}_f(y)$, como $x \neq y$, o terceiro item afirma que $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$, absurdo. Logo $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$. \square

O item 1 da Proposição 2.3 afirma que não existe uma órbita do fluxo Morse-Smale de x para y , quando $\text{ind}_f(x) < \text{ind}_f(y)$. O item 3 assegura que não existem órbitas conectantes entre pontos críticos que possuem o mesmo índice de Morse. Assim, se existe uma órbita conectante de x para y (com $x \neq y$), então $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$. Em outras palavras, dada uma órbita não-singular do fluxo gradiente negativo, esta órbita “nasce” em um ponto crítico de índice r e “morre” em um ponto crítico de índice s , com $s, r \in \mathbb{N}$ e $s < r$.

Voltando ao Exemplo 2.2, fica claro agora que o fluxo associado à função altura no toro, Figura 2.3, não é um fluxo Morse-Smale, pois existe conexão entre pontos de sela que possuem mesmos índices de Morse.

2.2.2 Compacidade

Assuma ao longo dessa subseção que o campo $-\nabla f$ é Morse-Smale e $x, y \in \text{Crit}(f)$. No caso em que a variedade conectante \mathcal{M}_{xy} não é compacta será investigado a estrutura de sua fronteira topológica vista como subconjunto de M , de onde surge uma compactificação canônica para o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ associado. No caso em que o **índice relativo**³ entre x e y é $+1$, a variedade $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ já é compacta, logo é um conjunto finito de pontos.

Teorema 2.4. *Se $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$ então $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} < \infty$.*

Demonstração: Suponha que não existam pontos críticos entre x e y . Se $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$, fixe $a \in (f(y), f(x))$ e defina $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} := \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a)$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, sejam:

$$S^u := f^{-1}(f(x) - \epsilon) \cap W^u(x) \quad \text{e} \quad S^s := f^{-1}(f(y) + \epsilon) \cap W^s(y).$$

Considere o fluxo destes conjuntos em um tempo $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $f|_{\varphi_{t_0} S^u} < a$ e $f|_{\varphi_{-t_0} S^s} > a$, t_0 existe já que não existem outros pontos críticos entre x e y .

³O índice relativo entre x e y é a diferença $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y)$.

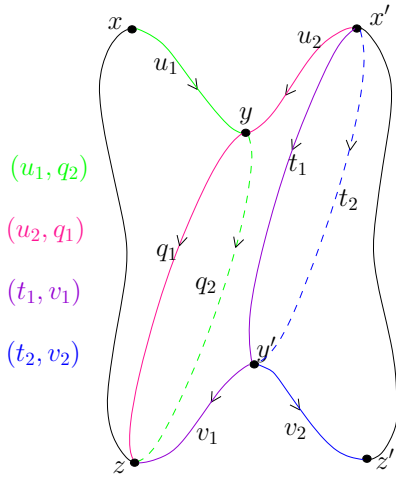
Sendo a interseção de três conjuntos fechados um conjunto fechado, segue que o conjunto:

$$A := \varphi_{[0,t_0]} S^u \cap f^{-1}(a) \cap \varphi_{[-t_0,0]} S^s$$

é fechado. Por outro lado, o conjunto A coincide com o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ de dimensão $0 = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) - 1$. Assim, $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é um subconjunto discreto fechado de uma variedade compacta e, portanto, é finito. O caso geral segue do próximo teorema. \square

O próximo teorema afirma que os espaços moduli, de qualquer dimensão, são compactos por órbitas quebradas. Logo, faz-se necessário uma definição sobre órbitas quebradas.

Pela Proposição 2.2 cada órbita do fluxo gradiente negativo “nasce” e “morre” em pontos



críticos da função de Morse f . Além disso, existe uma relação biunívoca entre as órbitas da variedade conectante \mathcal{M}_{xy} e os pontos do espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. Deste modo, os pontos do espaço moduli podem ser considerados como órbitas.

Considere as órbitas conectantes $u^i \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{i-1}x_i}$, com $x_0, x_i \in \text{Crit}(f)$ e $i \in \{1, \dots, l\}$. O conjunto formado pela união das órbitas u^1, \dots, u^l e dos pontos x_0, \dots, x_l é chamado de **órbita quebrada** e denotado por (u^1, \dots, u_n) .

A próxima definição formaliza a ideia de convergência de órbitas p_k , que é uma convergência geométrica com respeito a distância Riemanniana d em M das órbitas de p_k à união das órbitas de u^j 's. Mais precisamente,

Definição 2.2. Dada uma sequência de órbitas $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, a sequência $\{p_k\}$ converge para a órbita quebrada (u^1, \dots, u^l) quando

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0, \mathcal{O}(p_k) \subset U_\epsilon(\mathcal{O}(u^1) \cup \dots \cup \mathcal{O}(u^l)),$$

onde $U_\epsilon(A)$ denota uma ϵ -vizinhança aberta do subconjunto $A \subset M$.

O fato da sequência $\{p_k\}$ convergir para a órbita quebrada (u^1, \dots, u^l) será denotado por $p_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$. Neste caso, diz-se que a sequência p_k converge para a órbita quebrada (u^1, \dots, u^l) de ordem l . Veja Figura 2.5.

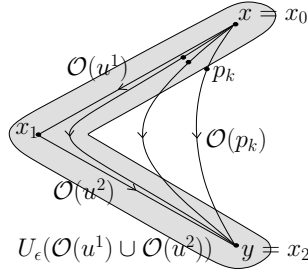


Figura 2.5: Convergência da sequência p_k para a órbita quebrada (u^1, u^2) de ordem 2.

Definição 2.3. Um subconjunto $K \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é dito compacto por órbitas quebradas se: para toda sequência de Cauchy $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em K , existem pontos críticos $x = x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = y$ e existem órbitas conectantes $u^j \in \widehat{\mathcal{M}}_{x_{j-1}x_j}$, com $j = 1, \dots, l$ tais que $p_k \rightarrow (u^1, \dots, u^l)$ quando $k \rightarrow \infty$.

O próximo teorema fornece uma compactificação natural para os espaços moduli via órbitas quebradas.

Teorema 2.5 (Compacidade). Se a condição de Morse-Smale é satisfeita, então o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é compacto por órbitas quebradas. Além disso, a convergência é de ordem no máximo $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y)$.

Demonstração: Fixe um valor regular a de f entre $f(x)$ e $f(y)$ e defina $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} \subset f^{-1}(a)$ como em (2.2). Assuma que $\text{ind}_f(x) > \text{ind}_f(y)$, caso contrário, $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \emptyset$ pela Proposição 2.3, e não há o que fazer. Dada uma sequência de Cauchy $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \subset f^{-1}(a)$, existe uma subsequência convergindo a algum elemento u do conjunto compacto $f^{-1}(a)$. Denote tal subsequência com a mesma notação da sequência. Pela Proposição 2.2, existem $z', z \in \text{Crit}(f)$ tais que $u \in \mathcal{M}_{z'z}$. Pela continuidade de φ_t , $\varphi_t(p_k) \rightarrow \varphi_t(u)$, segue que $\varphi_t(u)$ está no fecho $cl(\mathcal{M}_{xy})$ de \mathcal{M}_{xy} para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto $z \in cl(\mathcal{M}_{xy})$. A prova prosseguirá em duas etapas:

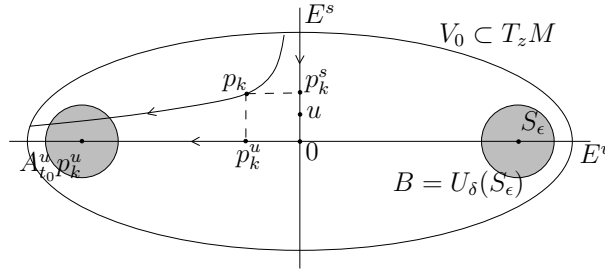
Passo 1: Se $z \neq y$, então existe $v \in W^u(z) \cap cl(\mathcal{M}_{xy})$ com $v \neq z$.

A chave da demonstração é o teorema de Grobman-Hartman para fluxos, que afirma que os fluxos associados à $-\nabla f$ e à $-D\nabla f(z)$ são localmente conjugados. (Ver [15], Capítulo 2, Teorema 4.10, onde apenas equivalência local é afirmada, mas de fato a conjugação local é provada.) Isto significa que existem vizinhanças U_z de z em M e V_0 de 0 em $T_z M$, como

também um homeomorfismo $h : U_z \rightarrow V_0$ tais que

$$h(\varphi_t(q)) = (D\varphi_t(z) \circ h)(q)$$

para todo (t, q) que satisfaz $\varphi_t(q) \in U_z$ e $D\varphi_t(z) \circ h(q) \in V_0$. Observe que h identifica uma vizinhança de z em $W^s(z)$ com uma vizinhança de 0 em E^s ; analogamente para os espaços instáveis. Assuma, sem perda de generalidade, que u e p_k são elementos de U_z , caso contrário aplique φ_T com $T > 0$ suficientemente grande e escolha uma subsequência. Agora, aplique o homomorfismo h e considere a imagem de u e de p_k em $V_0 \subset T_z M$. Continue usando a mesma notação para a sequência assim obtida em V_0 . (Veja a figura abaixo.)



Para provar o passo 1 assuma o contrário. Como h conjuga φ_t e a linearização do fluxo, o contrário significa que para cada esfera S_ϵ de raio ϵ em E^u admite uma δ -vizinhança B em $T_z M$ que é disjunta de \mathcal{M}_{xy} . Fixe $\epsilon > 0$ e $0 < \delta < \epsilon$ suficientemente pequenos, de modo que S_ϵ e B estejam contidos em V_0 . Assuma também que $|u| < \delta/2$, caso contrário aplique φ_T novamente. Pela linearidade do fluxo em $T_z M = E^s \oplus E^u$, pode-se escrever $D\varphi_t(z)p_k$ na forma $(A_t^s p_k^s, A_t^u p_k^u)$, onde $p_k = (p_k^s, p_k^u)$. Os operadores lineares $A_t^s \in \mathcal{L}(E^s)$ e $A_t^u \in \mathcal{L}(E^u)^4$, com $t > 0$, são uma contração estrita e uma dilatação estrita, respectivamente. Para todo k suficientemente grande tem-se $|p_k^s| < \delta$, daí e $|A_t^s p_k^s| < \delta$ para t positivo. Sendo A_t^u expansão e 0 o único ponto fixo de A_t , segue que $|A_{t_0}^u p_k^u| > \epsilon$ para algum $t_0 > 0$. Daí, a órbita $\mathcal{O}(p_k)$ vai em direção de B o que contradiz a afirmação inicial e prova o passo 1. Além disso, o argumento mostra que a órbita através de p_k converge localmente em torno de z para (u, v) no sentido da Definição (2.3).

Passo 2: *Prova do teorema.*

Assuma $z \neq y$, então pela Proposição 2.2 tem-se que $v \in \widehat{\mathcal{M}}_{z\tilde{z}}$, para algum $\tilde{z} \in \text{Crit}(f)$ com $\text{ind}_f(\tilde{z}) < \text{ind}_f(z)$. Repetindo o argumento na prova do Passo 1 tem-se um processo

⁴A aplicação tempo t do campo vetorial linear $-D\nabla f(x)$ é dada pelo operador linear simétrico $A_t = (A_t^s, A_t^u)$

iterativo que só pode terminar em y . E este processo deve terminar, pois $\text{Crit}(f)$ é finito pelo Corolário 1.2 e o índice dos pontos críticos em cada passo da iteração decresce estritamente pela Proposição 2.3. Começando novamente com a mesma sequência p_k e repetindo o mesmo argumento para o fluxo reverso, prova-se a existência dos pontos críticos e órbitas conectantes como na Definição 2.3.

Resta provar a convergência. Em torno de cada ponto crítico a prova foi feita no passo anterior. A convergência fora de vizinhanças fixadas dos pontos críticos é uma consequência da estimativa

$$d(\varphi_t q, \varphi_t \tilde{q}) \leq e^{\kappa|t|} d(q, \tilde{q}), \quad \forall q, \tilde{q} \in M \text{ e } \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\kappa = \kappa(M, -\nabla f) > 0$ é uma constante, veja [15] (Capítulo 2, Lema 4.8). A estimativa mostra que, em um intervalo compacto de tempo, as órbitas através de p_k convergem uniformemente para a órbita de u . Tome $b = f(v)$ e veja $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ como subconjunto de $f^{-1}(b)$. Cada ponto p_k determina um único ponto $\tilde{p}_k \in f^{-1}(b)$ definido pela intersecção da órbita de p_k e $f^{-1}(b)$. Argumentado como acima, incluindo a escolha de uma subsequência, tem-se que as órbitas através dos pontos \tilde{p}_k convergem uniformemente em um intervalo compacto de tempo para a órbita através de v . Repetindo este argumento uma quantidade finita de vezes conclui-se a prova do Teorema 2.5. \square

A prova para o caso geral do Teorema 2.4 segue, como corolário do Teorema da Compacidade. De fato, sendo o índice relativo entre x e y igual a 1, a sequência de pontos críticos dada pelo Teorema 2.5 é formada por apenas x e y , já que não há possibilidade de existir um ponto crítico de índice intermediário. Logo, o fato de $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ ser compacto por órbitas quebradas implica que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é compacto. Como a $\dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy}) = 0$, este espaço moduli é um conjunto discreto, sendo compacto, $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} < \infty$. Assim, a demonstração do Teorema 2.4 fica completa.

2.2.3 Colagem

Na subseção anterior foi investigada a estrutura da fronteira topológica do espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ e foi mostrado como isto conduz a uma compactificação natural do espaço moduli. No caso do índice relativo entre x e y ser $+1$ foi visto que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é compacto, portanto finito. Outro caso importante é quando o índice relativo entre x e z é $+2$. Neste caso, as componentes conexas de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ são difeomorfas à esfera S^1 ou ao intervalo $(0, 1)$. Esta dicotomia segue do

fato que estes são os únicos dois tipos de variedades 1-dimensionais sem fronteiras. Na Seção 2.3 será visto que para cada extremo de uma componente conexa aberta de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ corresponde um único par de órbitas conectantes $(u, v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$, onde y é um ponto crítico de índice intermediário.

A principal implicação do próximo teorema, é que para todo par $(u, v) \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ corresponde precisamente um dos extremos das componentes conexas e abertas $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$. O principal ingrediente para esta construção é a chamada aplicação de colagem. Mais precisamente, será definida uma aplicação C^1 que leva o par (u, v) e um parâmetro positivo real ρ a um único elemento de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$. Além disso, quando $\rho \rightarrow \infty$ a correspondência é com o par original (u, v) .

Teorema 2.6 (Colagem). *Assuma que a condição de Morse-Smale é satisfeita e sejam $x, y, z \in \text{Crit}(f)$ com índices de Morse $k+1, k, k-1$, respectivamente. Então existem um número real positivo ρ_0 e um mergulho*

$$\# : \widehat{\mathcal{M}}_{xy} \times [\rho_0, \infty) \times \widehat{\mathcal{M}}_{yz} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{xz}, \quad (u, \rho, v) \mapsto u \#_\rho v,$$

tais que

$$u \#_\rho v \longrightarrow (u, v) \quad \text{quando} \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Além disso, nenhuma sequência em $\widehat{\mathcal{M}}_{xz} \setminus (u \#_{[\rho_0, \infty)} v)$ converge para (u, v) .⁵

Demonstração: A prova é feita em 3 passos. Após uma construção local em torno de y , restringi-se a prova ao caso em que φ_t é definida em torno de $y = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Passo 1 (Modelo Local): *Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que uma vizinhança suficientemente pequena de y em $W^s(y)$ é uma vizinhança de 0 em E^s e similarmente para $W^u(y)$.*

O subespaço estável E^s associado a $d\varphi_t(y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é independente da escolha de $t > 0$ e similarmente para o subespaço instável E^u . Pelo Teorema 2.1, E^s e E^u são os espaços tangentes em y das variedades $W^s(y)$ e $W^u(y)$, respectivamente. A prova deste teorema mostra que, localmente em torno de y , as variedades estável e instável são gráficos. Mais precisamente, existem vizinhanças $U^s \subset E^s$ e $U^u \subset E^u$ de y e aplicações suaves $\eta_s : U^s \rightarrow E^u$ e $\eta_u : U^u \rightarrow E^s$ tais que $\eta_s(0) = 0$, $d\eta_s(0) = 0$ e similarmente para η_u . (Veja Figura 2.6.) Os gráficos de η_s e η_u , denotados por W_{loc}^s e W_{loc}^u , são chamados de variedade estável local e

⁵A convergência afirmada no Teorema 2.6 é no sentido da Definição 2.2.

variedade instável local, respectivamente.

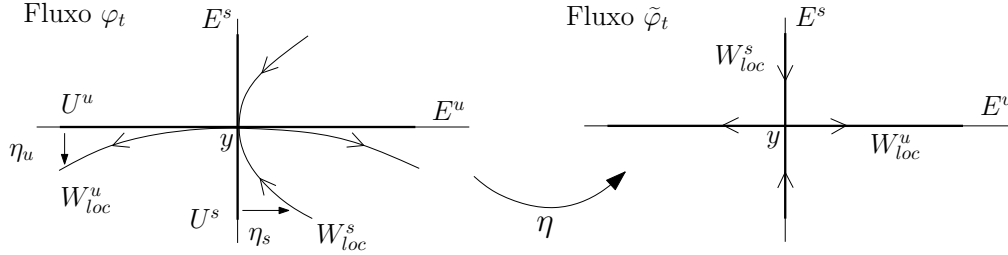


Figura 2.6: Variedade estável local e variedade instável local

A aplicação suave

$$\eta : U^u \times U^s \rightarrow E^u \oplus E^s, \quad (x_u, x_s) \mapsto (x_u - \eta_s(x_s), x_s - \eta_u(x_u))$$

satisfaz $\eta(0) = 0$ e $d\eta(0) = 1$. Daí, quando restrita a uma certa vizinhança de zero, η é um difeomorfismo. A família de difeomorfismos locais definida por $\tilde{\varphi}_t := \eta \circ \varphi_t \circ \eta^{-1}$, $t > 0$, satisfaz $\tilde{\varphi}_t(0) = 0$ e $d\tilde{\varphi}_t(0) = d\varphi_t(0)$. Além disso, uma vizinhança pequena de zero na variedade estável de $\tilde{\varphi}_t$ é uma vizinhança de zero em E^s e um resultado similar vale para a variedade instável.

Para referência posterior, fixe uma métrica $|\cdot|$ em \mathbb{R}^n compatível com a decomposição $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$, ou seja, sendo $\|\cdot\|_s$ a métrica em E^s e $\|\cdot\|_u$ a métrica em E^u , então $|x_s \oplus x_u| = \max\{\|x_s\|_s, \|x_u\|_u\}$.

Passo 2 (Unicidade do ponto de interseção): Fixe bolas fechadas $B^u \subset W_{loc}^u \subset E^u$ e $B^s \subset W_{loc}^s \subset E^s$ em torno de y e defina $V := B^u \times B^s$. Escolha $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ e assumo, sem perda de generalidade, que $u \in B^s$ (caso contrário, substitua u por $\varphi_T(u)$ para algum $T > 0$ suficientemente grande). Escolha um disco k -dimensional $D^k \subset W^u(x)$ que intersecta transversalmente a órbita de $\mathcal{O}(u)$ precisamente em u . Para $t \geq 0$, denote por D_t^k a componente conexa de $\varphi_t(D^k) \cap V$ contendo $\varphi_t(u)$.

Escolha $v \in \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$ e defina o disco $(n-k)$ -dimensional $D_{-t}^{n-k} \subset W^s(z)$ de maneira similar, mas com respeito ao fluxo reverso φ_{-t} (veja Figura 2.7). Então existe $t_0 \geq 0$, tal que para cada $t \geq t_0$ existe um único ponto p_t na interseção de D_t^k e D_{-t}^{n-k} .

A ideia da prova é representar D_t^k e D_{-t}^{n-k} , para $t > 0$ suficientemente grande, como gráfico de aplicações suaves $F_t : B^u \rightarrow B^s$ e $G_t : B^s \rightarrow B^u$, respectivamente. Como $D_t^k \cap D_{-t}^{n-k}$

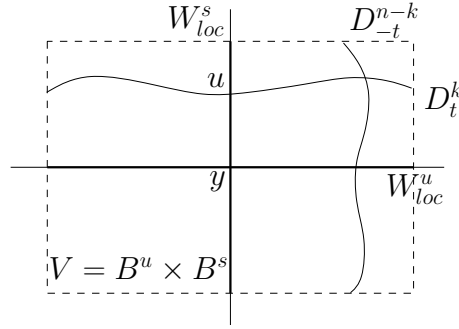


Figura 2.7: Único ponto de intersecção $p_t \in D_t^k \cap D_{-t}^{n-k} \subset W^u(x) \cap W^s(z)$.

corresponde aos pontos fixos de $G_t \circ F_t : B^u \rightarrow B^u$, basta mostra que esta aplicação é uma contração estrita.

Sendo a intersecção entre D^k e B^s transversal, pode-se aplicar o λ -lema (ver [15] Capítulo 2, Lema 7.2). Dado $\epsilon > 0$, o λ -lema assegura a existência de $t_0 > 0$ tal que D_t^k é ϵ C^1 -próximo de B^u , para todo $t \geq t_0$, e analogamente para D_{-t}^{n-k} e B^s). Isto significa que existem difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi_t : B^u &\longrightarrow D_t^k, & q &\longmapsto (\phi_t^u(q), \phi_t^s(q)), \\ \gamma_t : B^s &\longrightarrow D_{-t}^{n-k}, & p &\longmapsto (\gamma_t^u(p), \gamma_t^s(p)), \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_t^u(q) \\ \phi_t^s(q) \end{pmatrix} \right\| &< \epsilon, & \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\phi_t^u(q) \\ d\phi_t^s(q) \end{pmatrix} \right\| &< \epsilon, & \forall q \in B^u, \\ \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_t^u(p) \\ \gamma_t^s(p) \end{pmatrix} \right\| &< \epsilon, & \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\gamma_t^u(p) \\ d\gamma_t^s(p) \end{pmatrix} \right\| &< \epsilon, & \forall p \in B^s. \end{aligned}$$

Daí, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, as aplicações ϕ_t^u e γ_t^s são inversíveis e as aplicações desejadas são dadas por (veja Figura 2.8):

$$F_t(q) := \phi_t^s \circ (\phi_t^u)^{-1}(q), \quad G_t(p) := \gamma_t^u \circ (\gamma_t^s)^{-1}(p).$$

A existência de um ponto fixo da aplicação suave $G_t \circ F_t : B^u \rightarrow B^u$ segue do teorema do ponto fixo de Brouwer.

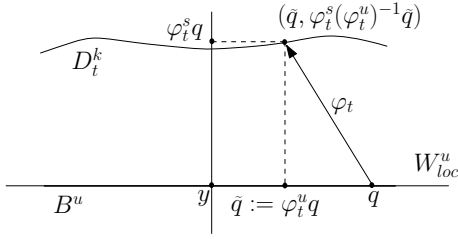


Figura 2.8: O disco D_t^k como gráfico da função $F_t := \phi_t^s \circ (\phi_t^u)^{-1}$.

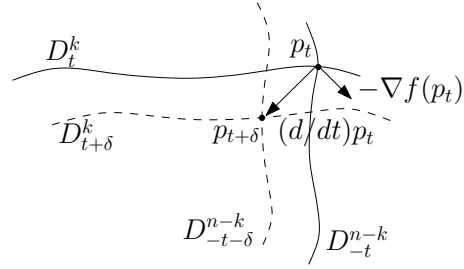


Figura 2.9: Variação do ponto de intersecção p_k .

Usando as desigualdades acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \|d(G_t \circ F_t)|_q\| &= \|d\gamma_t^u|_{(\gamma_t^s)^{-1}F_t q} \circ d(\gamma_t^s)^{-1}|_{F_t q} \circ d\phi_t^s|_{(\phi_t^u)^{-1}q} \circ d(\phi_t^u)^{-1}|_q\| \\ &\leq \epsilon^2 \|d(\gamma_t^s)^{-1}|_{F_t q}\| \cdot \|d(\phi_t^u)^{-1}|_q\| \\ &\leq \epsilon^2 / (1 - \epsilon)^2 \end{aligned}$$

A última expressão é estritamente menor que 1 sempre que $0 < \epsilon < 1/2$. A última desigualdade foi obtida definindo $S := d(\phi_t^u)|_q$ e aplicando a desigualdade triangular, donde

$$1 = \|S^{-1} - S^{-1}(\mathbb{1} - S)\| \geq \|S^{-1}\| - \|S^{-1}\| \cdot \|\mathbb{1} - S\|,$$

fornece uma estimativa para $\|S^{-1}\|$.

Pela Desigualdade do Valor Médio, $G_t \circ F_t$ é uma contração estrita. O princípio da contração garante um único ponto fixo. Além disso, $|p_t| < \sqrt{2\epsilon}$.

Passo 3 (Aplicação de Colagem): Usando a notação do passo anterior, defina $\rho_0 := t_0$ e $u \#_\rho v := p_\rho$, para todo $\forall \rho \in [\rho_0, \infty)$. Esta aplicação satisfaz as afirmações do teorema.

O campo vetorial de menos o gradiente é transversal aos discos D_t^k e D_{-t}^{n-k} (caso contrário, escolha D^k e D^{n-k} menores no passo 2). Isto implica que eles são “deslocado de si mesmo” pelo fluxo, logo sua intersecção p_t não pode permanecer constante: $(d/dt)p_t \neq 0$. Isto mostra que $u \# v$ é uma imersão em \mathcal{M}_{xz} . Para mostrar que $u \# v$ é, de fato, uma imersão em $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$, basta garantir que p_t não varia ao longo de uma linha de fluxo, ou seja, basta que $(d/dt)p_t$ e $-\nabla f(p_t)$ sejam linearmente independentes. O que ocorre, já que caso contrário os discos devem ser movidos ambos na direção de $-\nabla f$ ou na direção oposta. No entanto, neste caso, o disco D_t^k move na direção de $-\nabla f$ e D_{-t}^{n-k} move na direção oposta. (Veja Figura 2.9.)

Como $\dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xz}) = 1$, a aplicação $u\#.v : [t_0, \infty) \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ é também um homeomorfismo sobre sua imagem, e portanto, um mergulho.

Escolha uma sequência de números reais positivos $\epsilon_l \rightarrow 0$. O λ -lema garante a existência de uma sequência $\{t_{0,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que D_t^k é ϵ_l C^1 -próximo de B^u , sempre que $t \geq t_{0,l}$, e similarmente para D_{-t}^{n-k} . Dada qualquer sequência $t_i \rightarrow \infty$ de números reais suficientemente grandes, pode-se escolher uma subsequência $\{t_{0,l_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $t_i \geq t_{0,l_i}$. Segue que $D_{t_i}^k$ e B^u são ϵ_{l_i} C^1 -próximos e similarmente para $D_{-t_i}^{n-k}$ e B^s . Daí $|p_t| < \sqrt{2}\epsilon_{l_i} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Isto prova que

$$|p_t| \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Assim, a convergência de $u\#.v$ para a órbita quebrada (u, v) segue pelo mesmo argumento feito na prova do Teorema 2.5. A unicidade do ponto de intersecção p_t prova a afirmação final do Teorema 2.6. \square

2.2.4 Orientação de M_{xy}

O objetivo nessa subseção é, empregando a teoria de topologia diferencial, introduzir alguns conceitos os quais permitirão a definição do complexo de Morse-Witten. Essa subseção é dividida em dois tópicos: uma breve introdução de “Orientações de Fibrados Vetoriais e Variedades” e “Orientação de M_{xy} ” que usa ferramentas do primeiro tópico.

Orientações de Fibrados Vetoriais e Variedades

Para este tópico as referências principais são [5] e [6].

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$. Duas bases ordenadas $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ para V são equivalentes se o automorfismo $A : V \rightarrow V$ tal que $Ae_i = f_i$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, tem determinante positivo, ou seja, se a matriz mudança de base tem determinante positivo. É claro que a relação acima é de equivalência, e gera uma partição no conjunto das bases ordenadas de V em duas classes. Uma **orientação** de V é a escolha arbitrária de uma das classe de equivalência $[e_1, \dots, e_n]$ das bases, logo existem duas orientações possíveis; se uma é denotada por ω então $-\omega$ denota a outra orientação. A ordem das bases é importante, pois a troca de dois elementos numa base ordenada, produz uma nova base com uma ordem diferente e com orientação oposta à anterior.

No caso de um espaço vetorial de dimensão zero, é conveniente definir orientação simplesmente como sendo a escolha de um sinal $+1$ ou -1 .

Um espaço vetorial orientado é um par (V, ω) com ω uma orientação de V . Se $L : V \rightarrow V'$ é um isomorfismo de espaços vetoriais orientados (V, ω) e (V', ω') , com $\omega = [e_1, \dots, e_n]$, então $L\omega = [Le_1, \dots, Le_n]$ é uma orientação de V' , a orientação induzida por L . Um isomorfismo $L : V \rightarrow V'$ **preserva orientação** se $L\omega = \omega'$; caso contrário L **reverte orientação**.

A orientação padrão ω^n de \mathbb{R}^n com $n > 0$ é $[e_1, \dots, e_n]$, onde cada e_i é o i -ésimo vetor unitário. A orientação padrão para \mathbb{R}^0 é $+1$.

Seja $0 \rightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de espaços vetoriais. Dadas orientações $\omega' = [e_1, \dots, e_n]$ de E' e $\omega'' = [f_1, \dots, f_m]$ de E'' , uma orientação ω de E é definida por $\omega = [\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n), \beta(g_1), \dots, \beta(g_m)]$ onde $\beta(g_i) = f_i$. É fácil verificar que esta orientação independe da escolha dos vetores g_i 's. Mais geralmente, uma orientação em qualquer par de dois espaços que constituem a sequência exata acima induz uma orientação do terceiro espaço de forma única:

$$\omega = \omega' \oplus \omega'', \quad \omega' = \omega / \omega'', \quad \omega'' = \omega / \omega'.$$

Agora, seja $\xi = (p, E, B)$ um fibrado vetorial. Uma **orientação** para ξ é uma família $\omega = \{\omega_x\}_{x \in B}$, onde ω_x é uma orientação da fibra E_x de forma que ξ tenha um atlas \mathcal{A} com a seguinte propriedade: se $\vartheta : \xi|_U \rightarrow \mathbb{R}^n$ está em \mathcal{A} então $\vartheta_x : (E_x, \omega_x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \omega_n)$ preserva orientação. A família ω é chamada de **família coerente de orientações** das fibras, e \mathcal{A} de atlas orientado. Se ξ tem uma orientação ω , então ξ é dito orientável e o par (ξ, ω) é um **fibrado vetorial orientado**.

Abaixo encontra-se alguns resultados a serem utilizados cujas demonstrações podem ser encontradas em [6].

Proposição 2.4. *Todo fibrado vetorial sobre uma variedade M simplesmente conexa é orientável.*

Seja $0 \rightarrow \xi' \rightarrow \xi \rightarrow \xi'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de fibrados vetoriais. Dadas orientações ω' e ω'' para ξ' e ξ'' , respectivamente, a família $\omega = \{\omega_x\}_{x \in B}$ de orientações das fibras de ξ é obtida tomando-se $\omega_x = \omega'_x \oplus \omega''_x$; ω definido desta forma é uma família coerente de orientações, logo é uma orientação para ξ . Orientações em quaisquer dois par de fibrados vetoriais ξ', ξ, ξ'' determina, de maneira única, uma orientação para o terceiro fibrado, em particular:

Proposição 2.5. *Seja $0 \rightarrow \xi' \rightarrow \xi \rightarrow \xi'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de fibrados vetoriais. Dois dos fibrados ξ, ξ', ξ'' são orientáveis se e somente se o terceiro for orientável.*

A partir disto, uma variedade M é dita **orientável** se o fibrado tangente TM é um fibrado vetorial orientável, isto é, uma orientação para M é uma orientação para TM ; uma **variedade orientada** é um par (M, ω) , onde ω é uma orientação para M . Se M é conexa e orientável então M admite exatamente duas orientações.

Como corolário da Proposição (2.4), segue:

Corolário 2.1. *Qualquer variedade simplesmente conexa é orientável.*

Se (M, ω) e (N, θ) são duas variedades orientadas, um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ **preserva orientação** se $Tf : TM \rightarrow TN$ preserva orientação, ou seja $Tf\omega = \theta$. Caso contrário, f **reverte orientação**. Quando M é conexa, f tem que preservar ou reverter orientação. Assim, para determinar qual dessas situações acontece, basta ver o que acontece com $T_p f$.

Orientação de M_{xy}

Daqui em diante, assuma que (g, f) é um par Morse-Smale. Pela Observação 2.1 as variedades $W^u(x)$ e $W^s(y)$ são contráteis para quaisquer $x, y \in \text{Crit}(f)$; usando o Corolário 2.1 segue que estas variedades são orientáveis.

O próximo teorema garante que, dados $x, y \in \text{Crit}(f)$, a variedade conectante \mathcal{M}_{xy} e o espaço moduli $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ são variedades orientáveis. De fato, o Teorema 2.7 afirma que, dadas orientações de $W^u(x)$ e $W^u(y)$, estas induzem orientações em \mathcal{M}_{xy} e em $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, denotadas por $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ e $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]_{ind}$, respectivamente.

Teorema 2.7. *Fixe uma orientação arbitrária para $W^u(x)$, $\forall x \in \text{Crit}(f)$ e $ind_f(x) > 0$. Então, para todo $x, y \in \text{Crit}(f)$, \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ herdam uma orientação induzida $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ e $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]_{ind}$, respectivamente.*

Demonstração: Primeiramente, lembre que uma orientação para uma variedade é uma orientação para seu fibrado tangente.

Dados $x, y \in \text{Crit}(f)$, com $ind_f(x), ind_f(y) > 0$, fixe arbitrariamente orientações para $W^u(x)$ e $W^u(y)$. Se $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$, não há o que fazer. Suponha que $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$.

Como $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$, segue do Teorema (2.3) que o fibrado tangente $TW^u(x)$ decompõe-se ao longo de \mathcal{M}_{xy} do seguinte modo:

$$T_{\mathcal{M}_{xy}}W^u(x) \simeq T\mathcal{M}_{xy} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}}W^s(y), \quad (2.4)$$

onde o último termo denota o fibrado normal de $W^s(y)$ restrito à \mathcal{M}_{xy} . O objetivo é mostrar que $T\mathcal{M}_{xy}$ é orientável e determinar uma orientação $[T\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ de $T\mathcal{M}_{xy}$ a partir das orientações de $TW^u(x)$ e $TW^u(y)$. Pelo Corolário 2.5, basta mostrar que $T_{\mathcal{M}_{xy}}W^u(x)$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}}W^s(y)$ são fibrados vetoriais orientáveis.

Sendo $TW^u(x)$ um fibrado orientado, $T_{\mathcal{M}_{xy}}W^u(x)$ também o é, pois a restrição de um fibrado vetorial orientado a uma subvariedade é um fibrado vetorial orientado. Além disso, como $W^s(y)$ é contrátil, $\mathcal{V}W^s(y)$ é orientável. Sua orientação é determinada pela orientação de uma única fibra. A escolha natural é a fibra sobre y , pois esta é isomorfa ao espaço vetorial orientado $T_yW^u(y)$ via o isomorfismo que preserva orientação:

$$T_yW^u(y) \oplus T_yW^s(y) \simeq T_yM \simeq \mathcal{V}_yW^s(y) \oplus T_yW^s(y).$$

Restringindo o fibrado vetorial orientado $\mathcal{V}W^s(y)$ à subvariedade \mathcal{M}_{xy} obtém-se o fibrado vetorial orientado $\mathcal{V}_{\mathcal{M}_{xy}}W^s(y)$.

Para determinar a orientação induzida em $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, considere o isomorfismo:

$$T_{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}}\mathcal{M}_{xy} \simeq \mathbb{R} \oplus T\widehat{\mathcal{M}}_{xy},$$

onde a orientação de $[T_{\widehat{\mathcal{M}}_{xy}}\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ é dada pela restrição do fibrado vetorial orientado $T\mathcal{M}_{xy}$ e a orientação do fibrado linear é dada por $-\nabla f$. \square

As orientações induzidas $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ nas variedades conectantes \mathcal{M}_{xy} , com x e y variando no conjunto dos pontos críticos de f e tendo índice relativo igual a 1, serão essenciais na definição do complexo de Morse-Witten. Segundo a demonstração do Teorema 2.7, o procedimento para obter tais orientações é:

- Para cada ponto $x \in Crit(f)$, com $ind_f(x) > 0$, fixe arbitrariamente uma orientação para $W^u(x)$;
- Considere o espaço $\mathcal{V}_yW^s(y)$ com orientação compatível à orientação de $W^u(y)$;

- Através do isomorfismo que preserva orientação (2.4), determine a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$.

O Teorema 2.7 exige que os índices dos pontos críticos sejam maiores que zero. Ora, se $ind_f(y) = 0$ então $\mathcal{V}_y W^s(y) = 0$. Daí, $T_{\mathcal{M}_{xy}} W^u(x) \simeq T\mathcal{M}_{xy}$, de onde segue a orientação de \mathcal{M}_{xy} no caso em que $ind_f(y) = 0$.

Note que não há restrições sobre a orientabilidade da variedade Riemanniana M . Como exemplos serão vistos um no caso orientável e outro no caso não-orientável.

Exemplo 2.3 (Esfera 2-dimensional deformada). Considere a variedade S^2 e a função altura $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, como na Figura 2.10. A função f é de Morse com 4 pontos críticos: dois pontos repulsores x e x' , um ponto de sela y e um ponto atrator z . Veja que f é, de fato, uma função de Morse-Smale, pois o fluxo gradiente negativo oriundo de f não possui conexão entre pontos críticos de mesmos índices.

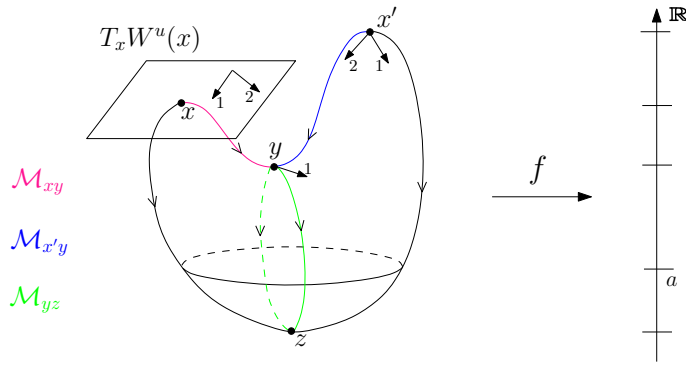


Figura 2.10: Função altura em S^2 .

Considerando as orientações para as variedades instáveis fixadas na Figura 2.10, o objetivo é encontrar as orientações dadas pelo Teorema 2.7 para as variedades conectantes.

Como z tem índice de Morse nulo, a orientação de $\mathcal{M}_{\ell z}$ é facilmente obtida, pois esta é induzida pela orientação de $T_\ell W^u(\ell)$; onde $\ell \in \{x, x', y\}$. Já as orientações $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ e $[\mathcal{M}_{x'y}]_{ind}$ requerem um pouco mais de atenção, elas são obtidas através do isomorfismo (2.4). Uma boa maneira de encontrar estas orientações é via a representação planar do fluxo em questão, como na Figura 2.11. Veja que a união no infinito do retângulo com o ponto z fornece a esfera S^2 . Nesta representação, o vetor $2'$ é obtido da orientação de $W^u(y)$ (que é compatível com a orientação de $\mathcal{V}_y W^s(y)$). O vetor $1'$ é escolhido de forma que a orientação dada pela base $\{1', 2'\}$ seja compatível com a orientação de $W^u(x)$, isto é, a orientação dada pela base $\{1, 2\}$. O vetor $1'$ determina a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$, assim a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ é

oposta à orientação dada pelo fluxo em \mathcal{M}_{xy} , como mostra a Figura 2.12. Analogamente, obtém-se os vetores $1''$ e $2''$ e a orientação $[\mathcal{M}_{x'y}]_{ind}$. \triangle

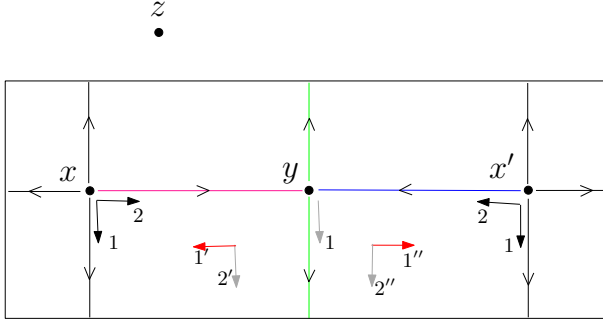


Figura 2.11: Representação planar do fluxo em S^2 .

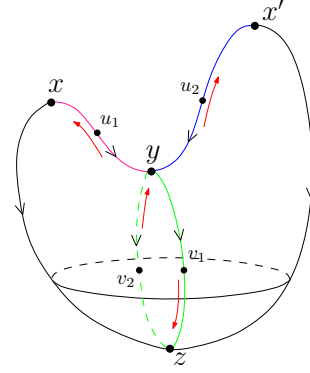


Figura 2.12: Orientações induzidas nas variedades conectantes.

Exemplo 2.4 (Plano Projetivo Real). Vendo o plano projetivo real como o disco unitário em \mathbb{R}^2 com os pontos de fronteiras identificados, considere a função de Morse, como na Figura 2.13, tendo precisamente três pontos críticos x , y e z com respectivos índices de Morse: 2, 1 e 0. Considere as orientações das variedades instáveis dadas na figura. A orientação de \mathcal{M}_{lz} coincide com a orientação da variedade instável de l , para $l = x, y$. A variedade conectante \mathcal{M}_{yz} tem duas componentes conexas, cada uma sendo uma linha de fluxo. Assim a orientação de cada componente conexa de \mathcal{M}_{yz} coincide com a orientação da variedade instável de y , como mostra a Figura 2.13. Já a orientação $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ é obtida pelo isomorfismo (2.4). A variedade \mathcal{M}_{xy} também tem duas componentes conexas, cada uma sendo uma linha de fluxo. A orientação induzida por $[\mathcal{M}_{xy}]_{ind}$ nestas linhas coincidem com a orientação dada pelo fluxo. \triangle

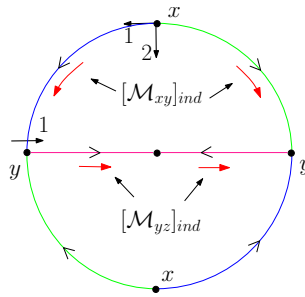


Figura 2.13: Função de Morse em $\mathbb{R}P^2$.

Dados $x, y, z \in \text{Crit}(f)$ com índices de Morse $k+1, k, k-1$, respectivamente, $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ e $v \in \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$, a aplicação de colagem de órbitas $u \#_\rho v = p_\rho$ dada no Teorema 2.6 induz uma **aplicação de colagem de orientações**

$$\sigma^\# : \text{Or}(\mathcal{M}_{xy}^u) \times \text{Or}(\mathcal{M}_{yz}^v) \longrightarrow \text{Or}(\mathcal{M}_{xz}^{u \#_\rho v}), \quad \rho \in [\rho_0, \infty),$$

onde \mathcal{M}_{xy}^u denota a componente conexa de \mathcal{M}_{xy} contendo u . Denote por $[\dot{u}]$ a orientação de \mathcal{M}_{xy}^u dada pelo fluxo. A orientação de uma k -dimensional fibra determinada por uma k -upla ordenada de vetores é denotada por $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Denote por $[\langle v_1, \dots, v_k \rangle]$ a orientação resultante em todo o fibrado vetorial. A aplicação $\sigma^\#$ é definida no caso da orientação dada pelo fluxo por (veja Figura 2.9)

$$\sigma^\#([\dot{u}], [\dot{v}]) := \left[\left\langle -\nabla f(p_\rho), -\frac{d}{d\rho}(p_\rho) \right\rangle \right],$$

e no caso geral por

$$\sigma^\#([\mathcal{M}_{xy}^u], [\mathcal{M}_{yz}^v]) := ab\sigma^\#([\dot{u}], [\dot{v}]) \quad (2.5)$$

onde $a, b \in \{\pm 1\}$ são determinados por $[\mathcal{M}_{xy}^u] = a[\dot{u}]$ e $[\mathcal{M}_{yz}^v] = b[\dot{v}]$.

Exemplo 2.5. Para melhor compreensão da aplicação de colagem de orientações, considere novamente a esfera S^2 e o fluxo Morse-Smale vistos no Exemplo 2.3.

Sendo x', y e z pontos críticos com índices consecutivos, pelo Teorema 2.6, existe um número real $\rho_0 > 0$ e um mergulho $(u_2, \rho, v_1) \mapsto u_2 \#_\rho v_1$. Na Figura 2.14 à esquerda são mostrados alguns pontos da imagem desse mergulho.

Deste modo, a aplicação $u_2 \#_\rho v_1$ induz uma aplicação de colagem de orientações. Na Figura 2.14 à direita, os vetores $-\nabla f(p_{\rho_2})$ e $-(d/d\rho)(p_{\rho_2})$ são ilustrados. \triangle

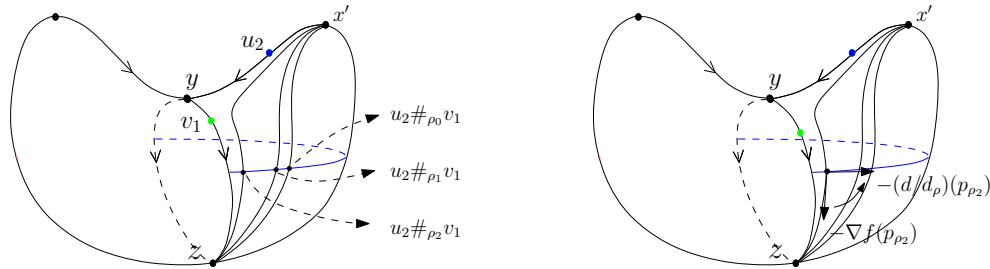


Figura 2.14: Exemplo de aplicação colagem.

Veja ainda que a orientação de $\mathcal{M}_{x'z}$ dada pela aplicação de colagem e a dada pelo Teorema 2.7 coincidem. O teorema a seguir mostra que este fato sempre acontece.

Teorema 2.8. *A aplicação de colagem $\sigma^\#$ e a orientação provida pelo Teorema 2.7 são compatíveis no seguinte sentido*

$$\sigma^\#([\mathcal{M}_{xy}^u]_{ind}, [\mathcal{M}_{yz}^v]_{ind}) = [\mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}]_{ind}.$$

Demonstração: Defina $n_u \in \{+1, -1\}$ pela identidade $[\mathcal{M}_{xy}^u]_{ind} = n_u[\dot{u}]$, então

$$\begin{aligned} \sigma^\#([\mathcal{M}_{xy}^u]_{ind}, [\mathcal{M}_{yz}^v]_{ind}) &= n_u n_v \sigma^\#([\dot{u}], [\dot{v}]) \\ &= n_u n_v \left[\left\langle -\nabla f(p_\rho), -\frac{d}{d\rho}(p_\rho) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para comparar o lado direito da equação (2.6) com $[\mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}]_{ind}$, é necessário relacionar as orientações induzidas dos fibrados $T\mathcal{M}_{xy}^u$, $T\mathcal{M}_{yz}^v$ e $T\mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}$. Infelizmente, as variedades bases destes fibrados não têm ponto em comum. Por outro lado, o ponto crítico y pertence ao fecho das três variedades bases e os três fibrados tangentes mencionados podem ser estendidos ao ponto y . Isto é devido à existência dos limites⁶

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(d/dt)\varphi_t u}{\|(d/dt)\varphi_t u\|} =: u(+\infty), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{(d/dt)\varphi_t v}{\|(d/dt)\varphi_t v\|} =: v(-\infty).$$

Considerando a mesma notação para o fibrado estendido ao ponto y e usando duas vezes o isomorfismo em (2.4), obtém-se que as fibras sobre y estão relacionadas por

$$\begin{aligned} [T_y W^u(x)] &= [T_y \mathcal{M}_{xy}^u]_{ind} \oplus [\mathcal{V}_y W^s(y)]_{ind} \\ &= [T_y \mathcal{M}_{xy}^u]_{ind} \oplus [T_y W^u(y)]_{ind} \\ &= [T_y \mathcal{M}_{xy}^u]_{ind} \oplus [T_y \mathcal{M}_{yz}^v]_{ind} \oplus [\mathcal{V}_y W^s(z)]_{ind}. \end{aligned}$$

E como $y = \lim_{\rho \rightarrow \infty} p_\rho$

$$[T_y W^u(x)] = [T_y \mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}]_{ind} \oplus [\mathcal{V}_y W^s(z)]_{ind}.$$

⁶Aqui o fato de y ser um ponto crítico não degenerado é crucial e $u(+\infty)$ e $v(-\infty)$ são autovetores da Hessiana de f em y correspondendo a autovalores positivos e negativos, respectivamente.

Daí,

$$[T_y \mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}]_{ind} = [T_y \mathcal{M}_{xy}^u]_{ind} \oplus [T_y \mathcal{M}_{yz}^v]_{ind} = n_u n_v [u(+\infty)] \oplus [v(-\infty)].$$

Os pares $\langle u(+\infty), v(-\infty) \rangle$ e $\langle -\nabla f(p_\rho), -\frac{d}{d\rho}(p_\rho) \rangle$ representam a mesma orientação de $\mathcal{M}_{xz}^{u\#_\rho v}$. Pela igualdade (2.6) isto prova o teorema. \square

2.3 O Complexo de Morse-Witten

Enfim, as ferramentas necessárias para a construção do complexo de Morse-Witten foram estabelecidas.

Ao longo desta seção, considere M uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita n . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Escolha de forma arbitrária uma orientação para cada variedade instável dos pontos críticos de f e denote este conjunto de escolhas por Or .

Definição 2.4. *O grupo graduado de Morse $CM_*(M, f) = \{CM_k(M, f)\}$, associado a uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com coeficientes inteiros e graduado pelos índices de Morse, é definido por:*

1. $CM_k(M, f) = 0$, se $k < 0$;
2. se $k \geq 0$, $CM_k(M, f)$ é o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $Crit_k(f)$, ou seja,

$$CM_k(M, f) := \bigoplus_{x \in Crit_k(f)} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

onde $Crit_k(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f de índice k .

Na definição acima, $\langle x \rangle$ denota o par consistindo do ponto crítico x e a orientação de $T_x W^u(x)$.

Com a finalidade de simplificar a notação, o k -ésimo **grupo de cadeia de Morse** $CM_k(M, f)$ será denotado apenas por $\mathcal{C}_k(f)$ e o grupo graduado de Morse $CM_*(M, f)$ por $\mathcal{C}_*(f)$. Veja que os grupos de cadeia de Morse são finitamente gerados pois uma função de Morse admite um número finito de pontos de críticos.

Seja g uma métrica Riemanniana em M . Se (g, f) não for um par Morse-Smale então pode-se substituir (g, f) localmente em C^1 por um par (\tilde{g}, \tilde{f}) Morse-Smale, de acordo com

o Teorema 2.2. Como o tipo de Morse⁷ é localmente constante, os grupos de cadeia são isomorfos. Deste modo, assuma, sem perda de generalidade, que (g, f) é um par Morse-Smale.

Assuma que $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$ e seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. A órbita $\mathcal{O}(u)$ é uma componente conexa de \mathcal{M}_{xy} , logo tem orientação induzida $[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}}$. Denotando a orientação induzida em $\mathcal{O}(u)$ pelo fluxo tangente por $[\dot{u}]$, o **signal característico** $n_u = n_u(\mathcal{O}r)$ da órbita através de u é definido por meio da igualdade

$$[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}} = n_u[\dot{u}].$$

Definição 2.5. O operador bordo de Morse-Witten $\partial_k^c(x) : \mathcal{C}_k(f) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ é definido nos geradores x de $\mathcal{C}_k(f)$ por

$$\partial_k^c(x) := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle, \quad n(x, y) = \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} n_u, \quad (2.7)$$

e é estendido a toda cadeia por linearidade.

O Corolário 1.1 garante que uma função de Morse admite apenas uma quantidade finita de pontos críticos, logo a primeira soma em (2.7) é finita. Já o Teorema 2.4 garante que $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ é formado por uma quantidade finita de pontos, o que garante que a segunda soma em (2.7) também é finita.

O próximo passo é mostrar que o grupo graduado de Morse $\mathcal{C}_*(f)$ juntamente com o operador bordo ∂_*^c formam um complexo de cadeia (o complexo de Morse-Witten). Mas antes disso, dois exemplos:

Exemplo 2.6 (Esfera 2-dimensional deformada). Retomando o Exemplo 2.3, onde tem-se um fluxo de Morse-Smale em S^2 , os grupos de cadeia de Morse e o operador bordo de Morse-Witten estão bem definidos, para este caso. Veja que os grupos de cadeia são: $\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle x \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle x' \rangle$, $\mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle y \rangle$, $\mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle z \rangle$ e $\mathcal{C}_k(f) = 0$, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$. Da Figura 2.12 tem-se que $n_{u_1} = -1$, $n_{u_2} = -1$, $n_{v_1} = +1$ e $n_{v_2} = -1$. Logo,

$$n(x, y) = n_{u_1} = -1, \quad n(x', y) = n_{u_2} = -1, \quad n(y, z) = n_{v_1} + n_{v_2} = +1 - 1 = 0.$$

⁷O tipo de Morse de uma função f é definido pelo número de pontos críticos juntamente com seus respectivos índices de Morse.

E os operadores $\partial_2^c : \mathcal{C}_2(f) \rightarrow \mathcal{C}_1(f)$, $\partial_1^c : \mathcal{C}_1(f) \rightarrow \mathcal{C}_0(f)$ e $\partial_0^c : \mathcal{C}_0(f) \rightarrow \bar{0}$ são definidos nos geradores por:

$$\partial_2^c \langle x \rangle = -\langle y \rangle, \quad \partial_2^c \langle x' \rangle = -\langle y \rangle, \quad \partial_1^c \langle y \rangle = \langle z \rangle - \langle z \rangle = 0 \quad \partial_0^c \langle z \rangle = 0.$$

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ com $k \neq 0, 1, 2$, tem-se que ∂_k^c é o operador nulo. \triangle

Exemplo 2.7 (Plano Projetivo Real). Considerando o fluxo de Morse-Smale no plano projetivo real visto no Exemplo 2.4, os grupos de cadeias são: $\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle x \rangle$, $\mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle y \rangle$, $\mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle z \rangle$ e $\mathcal{C}_k(f) = 0$, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$. Os sinais característicos das órbitas que passam por u_1 , u_2 , v_1 e v_2 são 1, 1, 1 e -1, respectivamente. Logo, $n(x, y) = u_1 + u_2 = 2$ e $n(y, z) = v_1 + v_2 = 0$. E, conseqüentemente, os operadores bordo são definidos nos geradores por:

$$\begin{array}{lll} \partial_2^c : \mathcal{C}_2(f) \rightarrow \mathcal{C}_1(f) & \partial_1^c : \mathcal{C}_1(f) \rightarrow \mathcal{C}_0(f) & \partial_0^c : \mathcal{C}_0(f) \rightarrow \bar{0} \\ \langle x \rangle \mapsto 2\langle y \rangle & \langle y \rangle \mapsto 0 & \langle z \rangle \mapsto 0 \end{array}$$

e ∂_k^c é o operador nulo para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$. \triangle

Para provar que $(\partial_*^c)^2 = 0$ serão estudadas as componentes 1-dimensionais dos espaços moduli. Nesse sentido, fixe $x \in \text{Crit}_k(f)$ e $z \in \text{Crit}_{k-2}(f)$. Pelo Teorema 2.3 o espaço de órbitas $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ é uma variedade (sem fronteira) de dimensão 1 e, portanto, suas componentes conexas $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$ são difeomorfas ao intervalo $(0, 1)$ ou à esfera unitária S^1 . Veja a Figura 2.15.

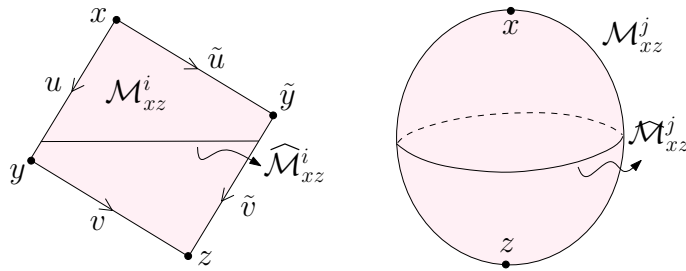


Figura 2.15: $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i \simeq (0, 1)$ e $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^j \simeq S^1$

Proposição 2.6. *Sejam $x \in \text{Crit}_k(f)$ e $z \in \text{Crit}_{k-2}(f)$, então:*

1. *O conjunto das órbitas quebradas de ordem 2 entre x e z*

$$\mathcal{B}_{xz}^1 := \{(u, v) \mid u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}, v \in \widehat{\mathcal{M}}_{yz}, \text{ para algum } y \in \text{Crit}_{k-1}(f)\}$$

corresponde exatamente aos “extremos” das componentes conexas não-compactas de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$.

2. Duas órbitas quebradas (u, v) e (\tilde{u}, \tilde{v}) correspondentes a mesma componente conexa $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$ são chamadas **cobordantes**. Além disso, seus sinais característicos satisfazem:

$$n_u n_v + n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} = 0.$$

Demonstração: Seja $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$ uma componente conexa não-compacta de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$. No parágrafo anterior, foi visto que $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i \approx (0, 1)$. Pelo Teorema 2.5, $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$ é compacto via órbitas quebradas; daí, tomando duas sequências em $(0, 1)$ uma convergindo a 0 e a outra a 1, obtém-se duas órbitas quebradas (u, v) e (\tilde{u}, \tilde{v}) com $u, \tilde{u} \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ e $v, \tilde{v} \in \widehat{\mathcal{M}}_{yz}$, onde cada órbita quebrada corresponde a um extremo de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$. A última afirmação do Teorema 2.6 implica que $(u, v) \neq (\tilde{u}, \tilde{v})$. (No entanto pode ocorrer que $u = \tilde{u}$ e $v \neq \tilde{v}$.) O Teorema da Colagem também garante que cada órbita quebrada (u, v) corresponde a um extremo de uma componente não-compacta de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$. Com isto conclui-se a prova de (i).

Para provar (ii), basta usar a Definição 2.4, o Teorema 2.8 e o fato de que $u \#_\rho v \in \mathcal{M}_{xz}^i$ e $\tilde{u} \#_\rho \tilde{v} \in \mathcal{M}_{xz}^i$ para obter a seguinte igualdade de orientações de \mathcal{M}_{xz}^i :

$$\begin{aligned} n_u n_v \left[\left\langle \nabla f(p_\rho), \frac{d}{d\rho} p_\rho \right\rangle \right] &= n_u n_v \sigma^\#([\dot{u}], [\dot{v}]) = \sigma^\#([\mathcal{M}_{xy}^u]_{ind}, [\mathcal{M}_{yz}^v]_{ind}) \\ &= [\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^{u \#_\rho v}]_{ind} = [\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^{\tilde{u} \#_\rho \tilde{v}}]_{ind} \\ &= \sigma^\#([\mathcal{M}_{xy}^{\tilde{u}}]_{ind}, [\mathcal{M}_{yz}^{\tilde{v}}]_{ind}) = n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} \sigma^\#([\dot{\tilde{u}}], [\dot{\tilde{v}}]) \\ &= n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} \left[\left\langle \nabla f(\tilde{p}_\rho), \frac{d}{d\rho} \tilde{p}_\rho \right\rangle \right] \\ &= -n_{\tilde{u}} n_{\tilde{v}} \left[\left\langle \nabla f(p_\rho), \frac{d}{d\rho} p_\rho \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

A última igualdade é válida, pois ambos os vetores $(d/d\rho)\tilde{p}_\rho$ e $(d/d\rho)p_\rho$ apontam para fora ao longo da fronteira de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$. \square

O próximo teorema afirma que a aplicação ∂^c apresentada na Definição 2.5 é de fato um operador bordo, ou seja, $\partial^c \circ \partial^c = 0$.

Teorema 2.9 (Operador Bordo). *O operador bordo de Morse-Witten satisfaz*

$$\partial_{k-1}^c \partial_k^c = 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Pela definição e linearidade de ∂ , definição de \mathcal{B}_{xz}^1 e pela Proposição 2.6 segue que

$$\begin{aligned} \partial_{k-1}^c \partial_k^c x &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}(f)} \left(\sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) n(z, y) \right) z \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}(f)} \left(\sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} \sum_{v \in \widehat{\mathcal{M}}_{yz}} n_u n_v \right) z \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}(f)} \left(\sum_{(u,v) \in \mathcal{B}_{xz}^1} n_u n_v \right) z \\ &= \sum_{z \in \text{Crit}_{k-2}(f)} \left(\sum (n_{u_i} n_{v_i} + n_{\tilde{u}_i} n_{\tilde{v}_i}) \right) z \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a última soma é sobre as componentes conexas $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}^i$ de $\widehat{\mathcal{M}}_{xz}$ difeomorfas a $(0, 1)$. \square

Desta maneira, o par $(C_*(f), \partial_*^c)$ formado pelo grupo graduado de Morse juntamente com o operador bordo de Morse-Witten, formam um complexo de cadeia, chamado **complexo de Morse-Witten**.

Definição 2.6. *Dadas uma variedade fechada e suave de dimensão finita M , uma função de Morse f e uma métrica Riemanniana g em M de forma que a condição de Morse-Smale seja satisfeita, denote por Or uma escolha de orientações de todas as variedades instáveis associadas ao campo vetorial $-\nabla f$. Então os **grupos de homologia de Morse com coeficientes inteiros** são definidos por*

$$HM_k(M) = HM_k(M; f, g, Or; \mathbb{Z}) := \frac{\ker \partial_k^c}{\text{im } \partial_{k+1}^c}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pelo Teorema da Transversalidade 2.2, pode-se definir os grupos de homologia de Morse para qualquer par (g, f) , Morse-Smale ou não, e para qualquer escolha de orientação Or . Como estes grupos são todos naturalmente isomorfos, a notação usada será $HM_*(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$.

(Para mais detalhes veja [23], Seção 4.)

Finalmente, segue o seguinte teorema que confirma o poder do complexo de Morse-Witten:

Teorema 2.10 (*Teorema da Homologia de Morse*). *A homologia de Morse do complexo $(C_*(f), \partial_*^c)$ é isomorfa à homologia singular da variedade M , ou seja,*

$$H_k(M) \approx HM_k(C_*(f), \partial_*^c) = \frac{\ker \partial_k^c}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^c}.$$

A demonstração deste resultado é feita no Capítulo 5, através de ferramentas da Teoria de Conley.

Como corolário do Teorema 2.10, segue as desigualdades de Morse.

Corolário 2.2. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e denote por c_k o número de pontos críticos de f de índice k e por $b_k = \operatorname{rank} H_k(M, \mathbb{Z})$ o k -ésimo número de Betti⁸. Então*

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^k b_0,$$

para todo $0 \leq k \leq n = \dim(M)$, e a igualdade vale quando $k = n$.

Observação 2.2. *O complexo de Morse-Witten pode ser definido para coeficientes em qualquer grupo abeliano G , para isto, basta definir $\mathcal{C}_k(f, G) = G \otimes \mathcal{C}_k(f)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e*

$$\partial_k^c(G) = \mathbf{1}_G \otimes \partial_k^c : \mathcal{C}_k(f, G) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f, G).$$

O último teorema e o Teorema dos coeficientes universais garantem que a homologia singular da variedade com coeficientes em G é isomorfa à homologia de Morse, com coeficientes em G , ou seja,

$$H_k(M, G) \approx HM_k(M, G) = \frac{\ker \partial_k^c(G)}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^c(G)}.$$

2.4 Definição alternativa de $n(x,y)$

O operador bordo de Morse-Witten pode ser caracterizado em termos de números de intersecção. Nesta seção será mostrada tal construção.

⁸O rank de $H_k(M, \mathbb{Z})$ é a cardinalidade uma base de sua parte livre.

Primeiramente, lembre que dada uma variedade orientável X de dimensão finita n , sejam Y e Z duas subvariedades compactas de X , tais que $Y \pitchfork Z$ e $\dim Y + \dim Z = n$, por (2.3) segue que $\dim(Y \cap Z) = 0$, ou seja, $Y \cap Z$ é um conjunto discreto, logo finito pela compacidade das subvariedades.

Seja $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ a orientação de $T_x Y$ e $[v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n]$ a orientação de $T_x Z$, se $[v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n]$ coincide com a orientação de $T_x M$, então defina $\text{sgn}(x) = +1$, caso contrário, defina $\text{sgn}(x) = -1$. Neste caso especial, o **número de intersecção** entre Y e Z em relação à X , denotado por $I(Y, Z; X)$, é definido da seguinte maneira:

$$I(Y, Z; X) = \sum_{x \in Y \cap Z} \text{sgn}(x).$$

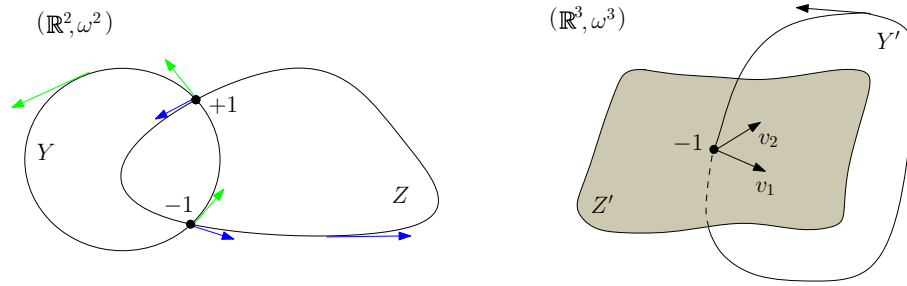


Figura 2.16: Número de intersecção: $I(Y, Z; \mathbb{R}^2) = 0$ e $I(Y', Z'; \mathbb{R}^3) = -1$.

Os exemplos da Figura 2.16 ilustram como calcular o número de intersecção entre duas curvas em \mathbb{R}^2 no primeiro caso, e entre uma curva e uma superfície em \mathbb{R}^3 no segundo caso. Para mais detalhes sobre número de intersecção veja [5] ou [6].

Em [19], Salamon mostra a relação existente entre número de intersecção e o operador bordo de Morse-Witten, que será abordada a partir de agora. Nesse sentido, sejam M uma variedade n -dimensional orientada e f uma função de Morse-Smale em M . O conjunto de nível $f^{-1}(a) = \{z \in M : f(z) = a\}$ é uma subvariedade orientada de M para todo valor regular a . Mais precisamente, uma base $\{\xi_2, \dots, \xi_n\}$ de $T_x f^{-1}(a)$ é dita positiva se $\{-\nabla f(x), \xi_2, \dots, \xi_n\}$ define uma base positiva para $T_x M$. (É claro que $\{-\nabla f(x), \xi_2, \dots, \xi_n\}$ é uma base para $T_x M$, pois $\nabla f(x)$ é ortogonal ao conjunto de nível $f^{-1}(a)$.)

Sejam $x, y \in \text{Crit}(f)$ de modo que o índice relativo entre x e y seja 1. Escolhida uma orientação para $E^u(x) = T_x W^u(x)$, esta induz uma orientação em $E^s(x) = T_x W^s(x)$ através

do isomorfismo que preserva orientação $T_x M \approx E^s(x) \oplus E^u(x)$. Segue que a **esfera instável**

$$W_a^u(x) = W^u(x) \cap f^{-1}(a)$$

herda uma orientação de $W^u(x)$ e a **esfera estável**

$$W_a^s(y) = W^s(y) \cap f^{-1}(a)$$

herda uma orientação de $W^s(y)$. As variedades $W_a^u(x)$ e $W_a^s(y)$ são orientadas usando a mesma convenção utilizada para orientar $f^{-1}(a)$.

O número de interseção entre $W_a^u(x)$ e $W_a^s(y)$ vistos como subvariedades de $f^{-1}(a)$ está bem definido, pois

$$W_a^u(x) \cap W_a^s(y) = W^u(x) \cap W^s(y) \cap f^{-1}(a) \approx \widehat{\mathcal{M}}_{xy},$$

que é uma 0-variedade, pelo Teorema 2.3 já que o índice relativo entre x e y é 1.

O inteiro $n(x, y)$ que aparece no operador bordo do complexo de Morse-Witten coincide com o número de interseção, $I(W_a^u(x), W_a^s(y); f^{-1}(a))$, de $W_a^u(x)$ e $W_a^s(y)$ em $f^{-1}(a)$. E por isso, o inteiro $n(x, y)$ é chamado de número de intersecção com respeito a x e y .

Observe que a definição de número de intersecção, dada no início desta seção, abrange apenas as variedades orientáveis. E, como foi visto, o complexo de Morse-Witten é definido para qualquer variedade fechada de dimensão finita, sendo esta orientável ou não. No caso de M ser não-orientável, para expressar o número $n(x, y)$ em termos de número de intersecção, deve-se considerar o levantamento \mathbb{Z}_2 -invariante de f para o recobrimento duplo orientado de M .

Exemplo 2.8 (Esfera 2-dimensional deformada). Retomando o exemplo da esfera 2-dimensional deformada vista no Exemplo 2.3, a intenção agora é obter os inteiros $n(x, y)$ por meio dos números de intersecção, e certificar que estes coincidem com os já obtidos no Exemplo 2.6.

Nesse sentido, fixe a orientação anti-horária $\{\xi_1, \xi_2\}$ para S^2 e permaneça com as orientações para as variedades instáveis dadas na Figura 2.10. Denote por $\{\eta_1, \eta_2\}$, $\{\eta'_1, \eta'_2\}$ e $\{\eta''_1\}$ as orientações de $W^u(x)$, $W^u(x')$ e $W^u(y)$, respectivamente.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ valores regulares com $a \in (f(y), f(x))$, $b \in (f(y), f(x'))$ e $c \in (f(z), f(y))$.

A orientação $\{v_1\}$ de $W_a^u(x)$ é escolhida de forma que a base $\{-\nabla f(p), v_1\}$ esteja na mesma classe de equivalência que a base $\{\eta_1, \eta_2\}$, onde $p \in W_a^u(x)$. Analogamente para a orientação de $W_b^u(x')$.

Agora, como $W_c^u(y)$ tem dimensão zero, cada ponto desta esfera admite como orientação os inteiros $+1$ e -1 . A determinação de qual deles é a orientação do ponto vem da comparação entre as orientações $\{\eta_1''\}$ e $\{-\nabla f(q)\}$, onde $q \in W_c^u(y)$. Se estas orientações coincidem, então a orientação em q é $+1$, caso contrário, é -1 .

De maneira similar, as orientações das esferas estáveis são obtidas. A Figura 2.17 sintetiza todas essas informações, mostrando as orientações obtidas nas esferas estáveis e instáveis.

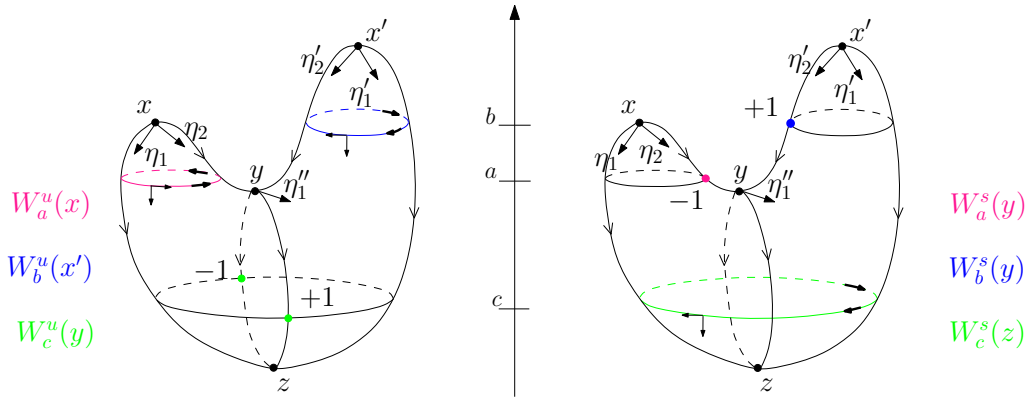


Figura 2.17: Orientações induzidas nas esferas estáveis e instáveis.

Sendo anti-horária a orientação de uma superfície de nível de S^2 , pela definição de número de intersecção tem-se:

$$n(x, y) = I(W_a^u(x), W_a^s(y); f^{-1}(a)) = -1,$$

$$n(x', y) = I(W_b^u(x'), W_b^s(y); f^{-1}(b)) = -1$$

$$e n(y, z) = I(W_c^u(y), W_c^s(z); f^{-1}(c)) = +1 - 1 = 0.$$

Observe que estes valores coincidem com os valores que já foram encontrados anteriormente no Exemplo 2.6. \triangle

A próxima seção é dedicada aos exemplos. São exibidos vários exemplos de complexos de Morse-Witten para diferentes variedades. Nestes exemplos, os inteiros $n(x, y)$ são obtidos pelo método apresentado na Seção 2.3.

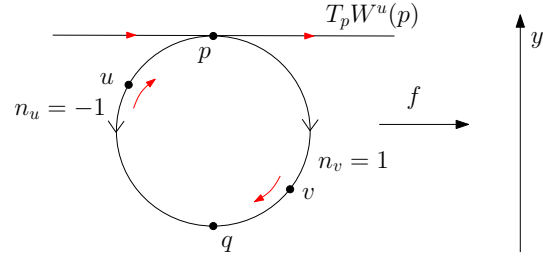
2.5 Exemplos - Teorema da Homologia de Morse

A vantagem do complexo de Morse-Witten é que o operador bordo é descrito geometricamente. Geralmente, dado o fluxo gradiente Morse-Smale, é mais fácil calcular a homologia do espaço usando o Teorema da Homologia de Morse.

Nas figuras a seguir é utilizado a convenção: a seta da forma $>$ indica o sentido do fluxo, a seta da forma \blacktriangleright representa a orientação da variedade instável em questão e a seta \curvearrowright indica a orientação induzida por \blacktriangleright em uma dada linha de fluxo.

Exemplo 2.9 (Esfera 1-dimensional). Considere $M = S^1$ e a função de Morse-Smale $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela função altura como na figura abaixo. A função f tem dois pontos críticos: p e q , com índices de Morse 1 e 0, respectivamente. A orientação de $W^u(p)$ é escolhida da esquerda para a direita, como indicado na figura. Veja que $\mathcal{M}_{pq} = S^1 - \{p, q\}$ e $\widehat{\mathcal{M}}_{pq} = \{u, v\}$.

O fluxo tangente induz as orientações anti-horária na órbita que passa em u e horária na órbita que passa por v . Já a orientação de $W^u(p)$ induz a orientação horária em $\mathcal{O}(u)$ e em $\mathcal{O}(v)$. Logo $n_u = -1$ e $n_v = 1$.



Assim, $n(p, q) = 0$ e o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$, dado por

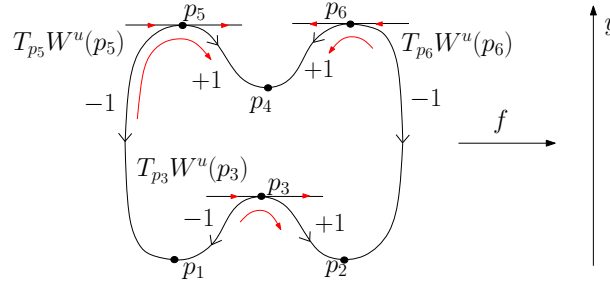
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_1(f) & \xrightarrow{\partial_1^c=0} & \mathcal{C}_0(f) & \xrightarrow{\partial_0^c=0} & 0 \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \\ \mathbb{Z}\langle p \rangle & \xrightarrow{\partial_1^c=0} & \mathbb{Z}\langle q \rangle & \xrightarrow{\partial_0^c=0} & 0 \end{array}$$

fornece a homologia

$$HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 0, 1 \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

como esperado. △

Exemplo 2.10 (Esfera 1-dimensional deformada). Considere $M = S^1$ e a função de Morse-Smale $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela função altura como ilustrados na figura abaixo. Neste caso, a função f possui seis pontos críticos: p_3, p_5 e p_6 cada um com índice de Morse igual a 1, e p_1, p_2 e p_4 cada um com índice de Morse zero.



Considerando as orientações das variedades instáveis como na figura, tem-se que

$$n(p_5, p_4) = n(p_6, p_4) = n(p_3, p_2) = 1$$

$$n(p_5, p_1) = n(p_6, p_2) = n(p_3, p_1) = -1.$$

E o complexo de Morse-Witten é:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_1(f) & \xrightarrow{\partial_1^c} & \mathcal{C}_0(f) & \xrightarrow{\partial_0^c} & 0 \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \\ \langle p_3, p_5, p_6 \rangle & \xrightarrow{\partial_1^c} & \langle p_1, p_2, p_4 \rangle & \xrightarrow{\partial_0^c} & 0 \end{array}$$

onde o operador bordo ∂_1^c é definido nos geradores de $\mathcal{C}_1(f)$ por $\partial_1^c \langle p_3 \rangle = \langle p_2 \rangle - \langle p_1 \rangle$, $\partial_1^c \langle p_5 \rangle = \langle p_4 \rangle - \langle p_1 \rangle$ e $\partial_1^c \langle p_6 \rangle = \langle p_4 \rangle - \langle p_2 \rangle$.

Veja que

$$\begin{aligned} HM_0(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) &= \frac{\ker \partial_0^c}{\text{Im} \partial_1^c} \\ &\approx \frac{\langle p_1, p_2, p_4 \rangle}{\langle p_2 - p_1, p_4 - p_1, p_4 - p_2 \rangle} \\ &\approx \langle p_1, p_2, p_4 ; p_1 = p_2 = p_4 \rangle \\ &\approx \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e

$$HM_1(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \ker \partial_1^c \approx \langle p_3 - p_5 + p_6 \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Assim, a homologia do complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é

$$HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 0, 1 \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

△

Exemplo 2.11 (Esfera n -dimensional). Seja

$$M = S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

a n -esfera e defina $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$. A função f é do tipo Morse-Smale e possui dois pontos críticos em S^n , o polo norte $N = (0, \dots, 0, 1)$ e o polo sul $S = (0, \dots, 0, -1)$.

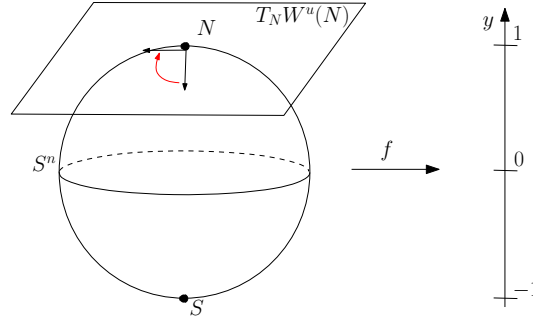


Figura 2.18: Função altura na esfera n -dimensional.

O complexo de Morse-Witten é

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_n(f) & \xrightarrow{\partial_n} & \mathcal{C}_{n-1}(f) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & \mathcal{C}_1(f) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{C}_0(f) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & & & \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \\ \mathbb{Z}\langle N \rangle & \xrightarrow{\partial_n} & 0 & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & 0 & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}\langle S \rangle & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

Quando $n = 0$ é claro que o operador bordo é nulo. No Exemplo 2.9 foi mostrado que $\partial_1^c = 0$ quando $n = 1$ e quando $n > 1$ não existe pontos críticos de índices 1. Daí, para $n \geq 0$, os operadores bordos no complexo de Morse-Witten da função altura em S^n são todos identicamente nulos.

Logo, quando $n = 0$

$$HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 0 \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

e para $n > 0$

$$HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 0, n \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

o que já era esperado. \triangle

Exemplo 2.12 (Toro bidimensional). Seja T^2 o toro bidimensional com a métrica usual e considere o fluxo de Morse-Smale no toro, como na Figura 2.19.

A função f , que dá origem ao fluxo em questão, possui quatro pontos críticos: s com índice de Morse 2, r e q cada um tendo índice de Morse igual a 1 e p com índice 0.

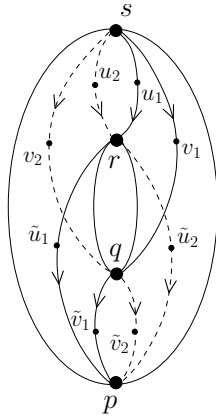


Figura 2.19: Fluxo Morse-Smale no toro.

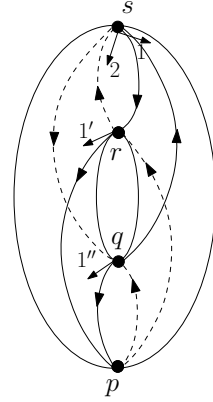


Figura 2.20: Orientações induzidas nas órbitas conectantes.

Os grupos de cadeia de Morse são $\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle s \rangle$, $\mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle r \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle q \rangle$, $\mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle p \rangle$ e $\mathcal{C}_k(f) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0, 1, 2$.

Considere as orientações das variedades instáveis mostradas na Figura 2.20. Como $\text{ind}_f(p) = 0$, a orientação de \mathcal{M}_{qp} é dada por $1''$, e a orientação de \mathcal{M}_{rp} é dada por $1'$. Já a orientação de \mathcal{M}_{sr} é ξ de modo que $\{\xi, 1'\}$ e $\{1, 2\}$ determinam a mesma orientação para $W^u(s)$. Analogamente, encontra-se a orientação de \mathcal{M}_{sq} . A Figura 2.20 mostra as orientações induzidas nas variedades conectantes. Agora fica fácil saber qual é o sinal característico de uma órbita que conecta dois pontos críticos cujos índices diferem por 1, para isso basta comparar a seta $>$ que indica o fluxo com a seta \blacktriangleright que indica a orientação induzida pela variedade conectante. Deste modo,

$$n_{u_1} = n_{v_2} = n_{\tilde{u}_2} = n_{\tilde{v}_1} = 1,$$

$$n_{u_2} = n_{v_1} = n_{\tilde{u}_1} = n_{\tilde{v}_2} = -1.$$

Segue que $n(s, r) = n(s, q) = n(r, p) = n(q, p) = 0$, ou seja, todos os operadores bordos são nulos. E o complexo de Morse-Witten é:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & \mathcal{C}_2(f) & \xrightarrow{\partial_2^c=0} & \mathcal{C}_1(f) & \xrightarrow{\partial_1^c=0} & \mathcal{C}_0(f) \xrightarrow{\partial_0^c=0} 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
 \cdots & \longrightarrow & \langle s \rangle & \xrightarrow{\partial_2^c=0} & \langle q, r \rangle & \xrightarrow{\partial_1^c=0} & \langle p \rangle \xrightarrow{\partial_0^c=0} 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Logo,

$$HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 1 \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

△

Capítulo 3

Conjuntos Invariantes Isolados

A partir deste capítulo será abordada a *teoria de Conley*, como é atualmente designada devido a contribuição significativa de Charles Conley. A teoria de Conley tem uma enorme gama de aplicações para o estudo da dinâmica de um sistema, incluindo existência de órbitas periódicas em sistemas Hamiltonianos e soluções do tipo ondas solitárias para equações diferenciais parciais, estrutura de atratores globais para equações de reação-difusão, a prova do comportamento caótico em sistemas dinâmicos e teoria da bifurcação.

A teoria de Conley é desenvolvida a partir de um conjunto invariante isolado. Um conjunto é dito invariante se é a união de órbitas, e é dito isolado se é o conjunto invariante maximal em alguma vizinhança compacta de si mesmo. O elemento fundamental desta teoria é o *índice de Conley*, que é uma ferramenta topológica que provê invariantes homotópicos e homológicos para conjuntos invariantes isolados. Na seção 3.1, serão definidos o índice homotópico e o índice homológico. A propriedade mais relevante do índice de Conley é sua invariância sob continuação, em particular sob pequenas perturbações.

A teoria de Conley generaliza a teoria de Morse, que descreve a estrutura dinâmica de uma variedade fechada através dos pontos críticos não degenerados de um campo vetorial gradiente. Na teoria de Morse não há como definir um índice para conjuntos invariantes mais gerais, enquanto o índice de Conley está bem definido para quaisquer fluxo contínuo e conjunto invariante isolado.

Na teoria de Conley, procura-se descrever a estrutura dinâmica de um conjunto invariante isolado S decompondo-o em uma união disjunta de conjuntos invariantes isolados “menores”. Na seção 3.2, são exibidas duas maneiras possíveis de decompor um conjunto invariante isolado: a *decomposição em par atrator-repulsor* e a *decomposição de Morse*.

O índice de Conley, a decomposição em par atrator-repulsor e a decomposição de Morse são essenciais para a definição de matriz de conexão, como será visto no Capítulo 4.

3.1 Índice de Conley

As principais referências para esta seção são: [2] e [18].

Antes de definir o índice de Conley, vale a pena recordar alguns conceitos básicos e resultados de Topologia. Para um estudo mais aprofundado veja [14].

Definição 3.1. Um **espaço pontuado** (Y, y_0) é um espaço topológico Y com um ponto distinguido $y_0 \in Y$, o qual recebe o nome de **ponto base**.

Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) dois espaços pontuados. Uma aplicação entre espaços pontuados $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$; $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é contínua se é contínua no sentido usual de X para Y .

Duas aplicações contínuas $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \\ H(x, 1) &= g(x) \\ H(x, s) &= y_0, \quad 0 \leq s \leq 1. \end{aligned}$$

O fato de f e g serem homotópicas é denotado por $f \simeq g$, e diz-se que f é homotópica a g . Veja que \simeq é uma relação de equivalência.

Dois espaços pontuados (X, x_0) e (Y, y_0) são **topologicamente equivalentes** se existem aplicações $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ tais que $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ e $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$. Neste caso, é comum escrever $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ e dizer que os pares (X, x_0) e (Y, y_0) têm o mesmo *tipo de homotopia*.

Observe que a equivalência homotópica define uma classe de equivalência no conjunto dos espaços topológicos. Por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \simeq S^1$.

O tipo de homotopia do par (y_0, y_0) é chamado de trivial e denotado por $\bar{0}$.

Seja S^k a esfera unitária k -dimensional. O tipo de homotopia do par (S^k, s_0) , com $s_0 \in S^k$, é denotado por Σ^k .

Dado um par de espaços topológicos (N, L) com $L \subset N$ e $L \neq \emptyset$, defina sobre N a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x, y \in L. \quad (3.1)$$

Denote por N/L o espaço pontuado $(N/\sim, [L])$, onde $[L]$ representa a classe de equivalência dos pontos de L segundo a relação (3.1) e $N/\sim = \{[x] : x \in N\}$ pode ser identificado com $(N \setminus L) \cup [L]$. Assim, N/L denota o espaço obtido de N ao colapsar o subconjunto L a um ponto.

No caso em que $L = \emptyset$, é convenção considerar o espaço N/L como sendo $(N \cup \{*\}, \{*\})$, onde $\{*\}$ denota a classe de equivalência do conjunto vazio.

A topologia em N/L é definida da seguinte forma: um subconjunto $U \subset N/L$ é aberto se U é aberto em N e $U \cap L = \emptyset$ ou se o conjunto $(U \cap (N \setminus L)) \cup L$ é aberto em N .

Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) dois espaços pontuados. O espaço produto de (X, x_0) e (Y, y_0) é o espaço pontuado $(X \times Y, X \times y_0 \cup x_0 \times Y)$. Além disso, a **soma wedge** de X e Y é

$$X \vee Y := (X \sqcup Y) / \{x_0 \sim y_0\},$$

ou seja, o quociente da união disjunta de X e Y sob a identificação $x_0 \sim y_0$; e o **produto smash** de X e Y é

$$X \wedge Y := X \times Y / X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y.$$

ou seja, o quociente do espaço produto $X \times Y$ sob a identificação $(x, y_0) \sim (x_0, y)$, para todo $x \in X, y \in Y$.

Os espaços X e Y podem ser vistos como subespaços de $X \times Y$, identificando-os com $X \times y_0$ e $x_0 \times Y$. Estes dois espaços se interceptam no ponto (x_0, y_0) . Deste modo, a união destes espaços pode ser identificada com a soma wedge de X e Y . E portanto, tem-se as seguintes identificações:

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \quad \text{e} \quad X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

Como exemplos: a soma wedge de dois círculos é homeomorfo à figura 8; o produto smash de qualquer espaço pontuado X com a 0-esfera é homeomorfo a X ; o produto smash de dois círculos é o quociente do toro com a figura 8, que é homeomorfo a S^2 ; o produto smash de S^m com S^n é homeomorfo a S^{m+n} .

Esta seção é dividida em duas subseções, a primeira dedicada ao índice homotópico de Conley e a segunda ao índice homológico de Conley.

3.1.1 Índice Homotópico de Conley

Seja $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ um fluxo contínuo sobre X , onde X é um espaço métrico localmente compacto. Como foi visto na Seção 1.1, um conjunto $S \subset X$ é invariante sob o fluxo φ se $\varphi(\mathbb{R}, S) = S$. Recordando a definição de conjunto invariante maximal:

Definição 3.2. *Seja $N \subset X$ um subconjunto de X . O conjunto invariante maximal em N é definido por:*

$$Inv(N) = \{x \in X : \varphi(t, x) \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Esta definição sugere que $Inv(N)$ é um conjunto invariante e, além disso, é maximal em N com relação a esta propriedade. Com efeito, $Inv(N)$ é invariante sob o fluxo φ , pois se $x \in Inv(N)$ e $y \in \mathcal{O}(x)$ então $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(x) \subset N$, portanto $y \in Inv(N)$.

Agora, suponha que $L \subset N$ é um conjunto invariante, dado $x \in L$, por L ser invariante, $\mathcal{O}(x) \subset L \subset N$; logo $x \in Inv(N)$ e, portanto, $L \subset Inv(N)$. Ou seja, o conjunto $Inv(N)$ é o “maior” conjunto invariante em N .

Outra propriedade interessante do conjunto $Inv(N)$ é:

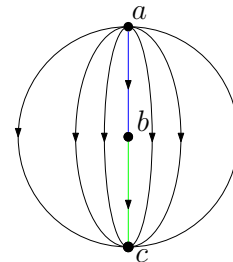
Proposição 3.1. *Se $N \subset X$ é compacto então $Inv(N)$ é compacto.*

Demonstração: Basta mostrar que $Inv(N)$ é fechado em N . Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $Inv(N)$ e $x_0 \in X$ tais que $x_n \rightarrow x_0$. Para mostra que $Inv(N)$ é fechado, basta mostrar que $x_0 \in Inv(N)$. Como φ é contínua, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, $\varphi(t, x_n) \rightarrow \varphi(t, x_0)$ quando $n \rightarrow \infty$. Sendo $x_n \in Inv(N)$, $\varphi(t, x_n) \in Inv(N) \subset N$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, $(\varphi(t, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em N que converge a $\varphi(t, x_0)$, logo $\varphi(t, x_0) \in N$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\mathcal{O}(x_0) \subset N$, o que implica que $x_0 \in Inv(N)$. \square

Definição 3.3. *Diz-se que $S \subset X$ é um conjunto invariante isolado quando existe uma vizinhança compacta N em X de S tal que $S \subset \text{int}(N)$ e $S = Inv(N)$. Neste caso, N é dita uma vizinhança isolante de S .*

Segue da Proposição 3.1 que todo conjunto invariante isolado é compacto. Além disso, a união disjunta de conjuntos invariantes isolados é um conjunto invariante isolado. Mas, em geral, se a união não for disjunta esta afirmação não é verificada.

Como indicado na figura ao lado, o fluxo no disco têm três pontos estacionários e as órbitas dos outros pontos “correm para baixo”. Os pontos a, b e c formam conjuntos invariantes isolados, $A := \{a, b\} \cup C(a, b)$ e $C := \{b, c\} \cup C(b, c)$ também são conjuntos invariantes isolados, onde $C(k_1, k_2)$ representa a órbita que conecta os pontos k_1 e k_2 . Porém, a união $A \cup C$ não é isolado, apesar de ser invariante.



Exemplo 3.1. Considere um ponto de sela na origem do plano. Este ponto é um conjunto invariante isolado, pois o conjunto compacto $N = [-1, 1] \times [-1, 1]$ é uma vizinhança isolante da origem, como mostra a Figura 3.1. \triangle

Exemplo 3.2. Existem conjuntos que são invariantes pelo fluxo mas não são isolados. Como exemplo, considere a equação diferencial ordinária em \mathbb{R}^2 dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned}$$

A origem $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio, logo $S = \{(0, 0)\}$ é um conjunto invariante porém não é isolado, pois qualquer vizinhança compacta N de $(0, 0)$ contém uma órbita periódica, veja a Figura 3.2. \triangle

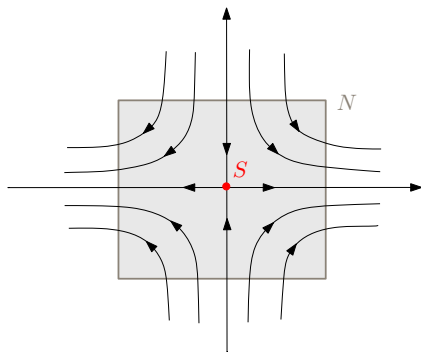


Figura 3.1: Conjunto invariante isolado.

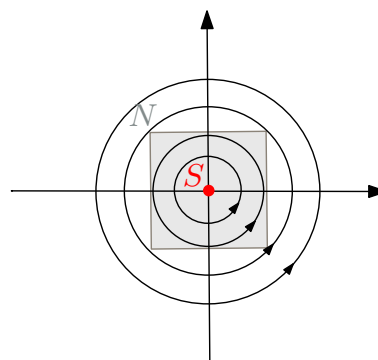
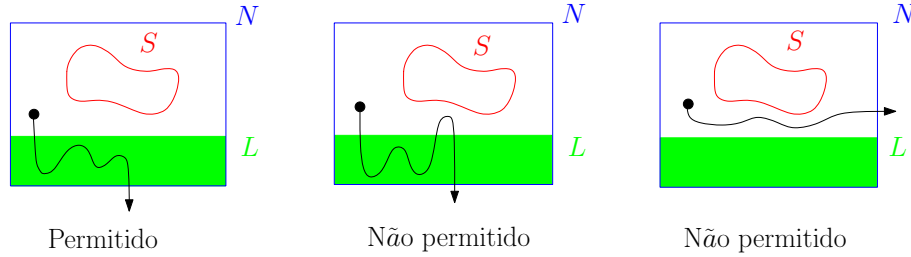


Figura 3.2: Conjunto invariante que não é isolado.

Uma ferramenta importante na teoria de Conley é a noção de “par-índice”, que será estudada agora. Intuitivamente, um par índice para um conjunto invariante isolado S é um par de espaços compactos (N, L) com $L \subset N$ e $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S , de modo que uma das seguintes situações ocorra: a órbita em tempo positivo de um ponto de $N \setminus L$ ou está contida em $N \setminus L$ ou escapa de N passando por L , de forma que, após a órbita “entrar” em L esta não retorna à $N \setminus L$.

Definição 3.4. *Seja $S \subset X$ um conjunto invariante isolado. Um par (N, L) de conjuntos compactos de X é um **par-índice** para S em X se $L \subset N$ e*

1. $\overline{N \setminus L}$ é uma vizinhança isolante de S em X ;
2. L é **positivamente invariante** em N , ou seja, se $x \in L$ e $\varphi([0, T], x) \subset N$ então $\varphi([0, T], x) \subset L$;
3. Se $x \in N$ e $\varphi([0, \infty), x) \not\subset N$ então existe $T > 0$ tal que $\varphi([0, T], x) \subset N$ e $\varphi(T, x) \in L$.



O item 3 da definição anterior afirma que cada órbita que deixa o conjunto invariante N em tempo positivo tem que passar obrigatoriamente por L antes de deixar N , por isso, L recebe o nome de **conjunto de saída** do fluxo para N .

Para melhor compreensão da Definição 3.4, abaixo encontram-se alguns exemplos de conjuntos invariantes isolados com seus respectivos pares-índice.

Exemplo 3.3. Considere fluxos no plano que têm como retrato de fase as figuras 3.3, 3.4 e 3.5. Cada um destes fluxos admite um conjunto invariante isolado formado por uma singularidade, a saber, um ponto atrator, um ponto de sela e um ponto repulsor, respectivamente. No Capítulo 5, Exemplo 5.1, encontra-se uma prova de que uma singularidade forma um conjunto invariante isolado. Nas figuras mencionadas, também encontram-se um par-índice (N, L) para cada singularidade S . △

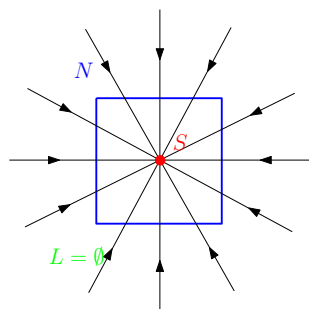


Figura 3.3: Ponto atrator.

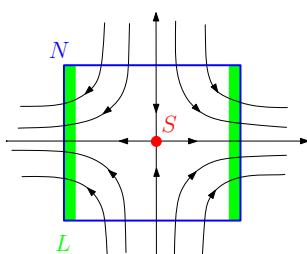


Figura 3.4: Ponto de sela.

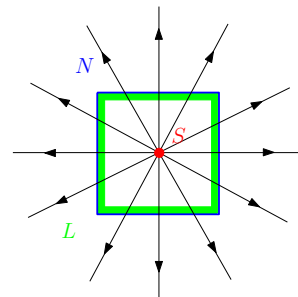


Figura 3.5: Ponto repulsor.

Exemplo 3.4. A faixa de Möbius admite um fluxo com um ponto repulsor e um ponto de sela, veja a Figura 3.7. Esta figura também mostra um par-índice para o conjunto invariante formado pela sela. Δ

Exemplo 3.5. Considere o campo vetorial gradiente $\dot{x} = x^2 - y^2$ e $\dot{y} = -2xy$ gerado pela função $f(x, y) = (1/3)x^3 - xy^2$. Este sistema tem $(0, 0)$ como único ponto estacionário, conhecido como sela de macaco. O retrato de fase desse sistema encontra-se na Figura 3.6, onde também está ilustrado um par-índice para $(0, 0)$. Δ

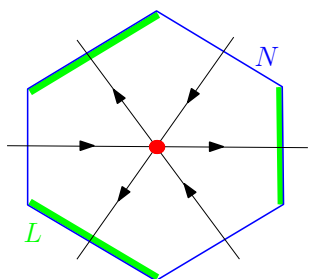


Figura 3.6: Sela degenerada.

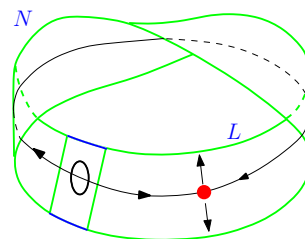


Figura 3.7: Sela na faixa de Möbius.

O par-índice está bem definido apenas para conjuntos invariantes isolados. O próximo resultado garante a existência do par-índice para qualquer conjunto invariante isolado.

Teorema 3.1 (Existência do par-índice). *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo contínuo φ . Então existem conjuntos compactos N e L tais que (N, L) é um par-índice para S .*

A demonstração deste teorema foi feita por Conley em [2] e, posteriormente, Salamon fez uma prova mais simples em [18].

Assim, dado qualquer conjunto invariante isolado S sempre é possível obter um par-índice para S . Porém, não há garantia da unicidade deste par-índice. Na verdade, tal objeto pode ser escolhido de várias formas. O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 3.6. Considere novamente o caso de um fluxo no plano que admite como singularidade um ponto de sela. Na Figura 3.8 são exibidos três pares-índices (N, L) , (N', L') e (N'', L'') para o conjunto invariante isolado S formado apenas pela singularidade. \triangle

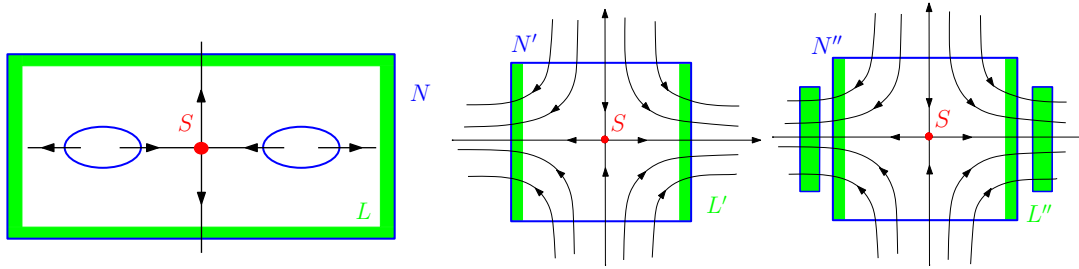


Figura 3.8: Pares-índice distintos para um ponto de sela S .

Exemplo 3.7. Considere o fluxo no plano que possui dois pontos de sela x e y que não se conectam, como na Figura 3.9. Cada um destes pontos forma um conjunto invariante, e veja que o conjunto $S = \{x, y\}$ formado pela união dos pontos de sela também é um conjunto invariante isolado. Logo, existe par-índice para S . De fato, na figura em questão estão representados dois pares-índice para S , um par índice (N, L) é formado pelo retângulo grande e o outro par-índice (N', L') é formado pela união dos dois quadrados. \triangle

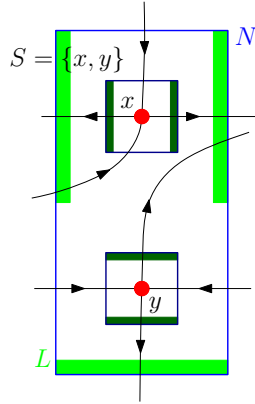


Figura 3.9: Conjunto invariante formado por dois pontos de sela.

O índice homotópico de Conley de um conjunto invariante isolado é definido a partir de uma informação comum que todos os pares-índice de S possuem. Essa informação é dada pelo próximo teorema.

Teorema 3.2 (Invariância do par-índice). *Se S é um conjunto invariante isolado e (N, L) e (\tilde{N}, \tilde{L}) são dois pares-índice para S , então N/L e \tilde{N}/\tilde{L} são homotopicamente equivalentes, ou seja, tem o mesmo tipo de homotopia.*

De fato, se (N, L) e (\tilde{N}, \tilde{L}) são dois pares-índice para S , então existe uma equivalência homotópica (definida pelo fluxo) entre os espaços pontuados N/L e \tilde{N}/\tilde{L} . Os detalhes dessa equivalência homotópica via o fluxo podem ser encontrados em [10].

Os teoremas 3.2 e 3.1, que são fundamentais na teoria de Conley, foram demonstrados por Conley em [2] e posteriormente por Salamon, que provou estes resultados de forma mais simples em [18].

Pelo Teorema da Invariância do par-índice, o tipo de homotopia do espaço pontuado N/L , onde (N, L) é um par-índice para S , só depende do comportamento do fluxo em uma vizinhança de S , e portanto a próxima definição faz sentido.

Definição 3.5 (Índice Homotópico de Conley). *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ . O índice homotópico de Conley de S é definido como sendo o tipo de homotopia do espaço pontuado N/L , onde (N, L) é um par-índice para S . Este índice é denotado por $h(S) = [N/L]^1$.*

Exemplo 3.8. A Figura 3.10 apresenta um fluxo em \mathbb{R}^2 que possui conexão de duas selas. O conjunto S' formado pelas duas selas e pela órbita que conecta estas selas é um conjunto invariante isolado. Logo, o índice homotópico de S' está bem definido. Para obtê-lo basta considerar um par-índice (N, L) qualquer de S' , como por exemplo o mostrado na figura, e calcular o tipo de homotopia do espaço pontuado N/L . Assim, $h(S') = \Sigma^1 \vee \Sigma^1$. \triangle

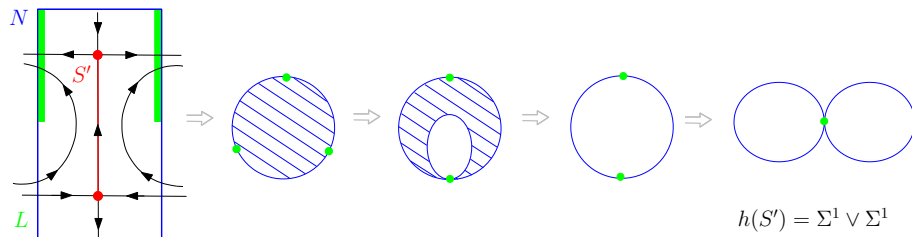


Figura 3.10: Tipo de homotopia do espaço pontuado N/L .

¹ $[N/L]$ denota a classe de equivalência do espaço pontuado N/L sob a relação \simeq , ou seja, a coleção de todos os pares (Y, y_0) tais que $(Y, y_0) \simeq N/L$.

Observação 3.1. Note que o conjunto invariante isolado S do Exemplo 3.7 admite o mesmo par-índice que o conjunto invariante isolado S' do Exemplo 3.8 e, portanto, S e S' têm o mesmo índice homotópico. Assim, o índice homotópico de Conley perde informações dinâmicas, no sentido que uma conexão entre dois pontos de sela como S' possui o mesmo índice que o conjunto formado por apenas dois pontos de sela. Observe ainda que a sela de macaco, Exemplo 3.5, também tem como índice homotópico a soma wedge de duas esferas de dimensão 1.

Como foi afirmado anteriormente, o índice de Conley generaliza o índice de Morse. Com efeito, o índice de Morse está bem definido apenas para singularidades não degeneradas, já o índice de Conley está bem definido para qualquer conjunto invariante isolado, em particular para singularidades não-degeneradas como também para as degeneradas. O índice de Morse é um número não negativo já o índice de Conley é o tipo de homotopia de um espaço pontuado. No caso dos pontos críticos não degenerados estes dois índices se relacionam da seguinte forma: se x é uma singularidade tendo índice de Morse k , então o índice de Conley é o tipo de homotopia da k -esfera, ou seja, $h(x) = \Sigma^k$. Esta relação será vista com maior detalhe no Capítulo 5, mais especificamente, Exemplo 5.1.

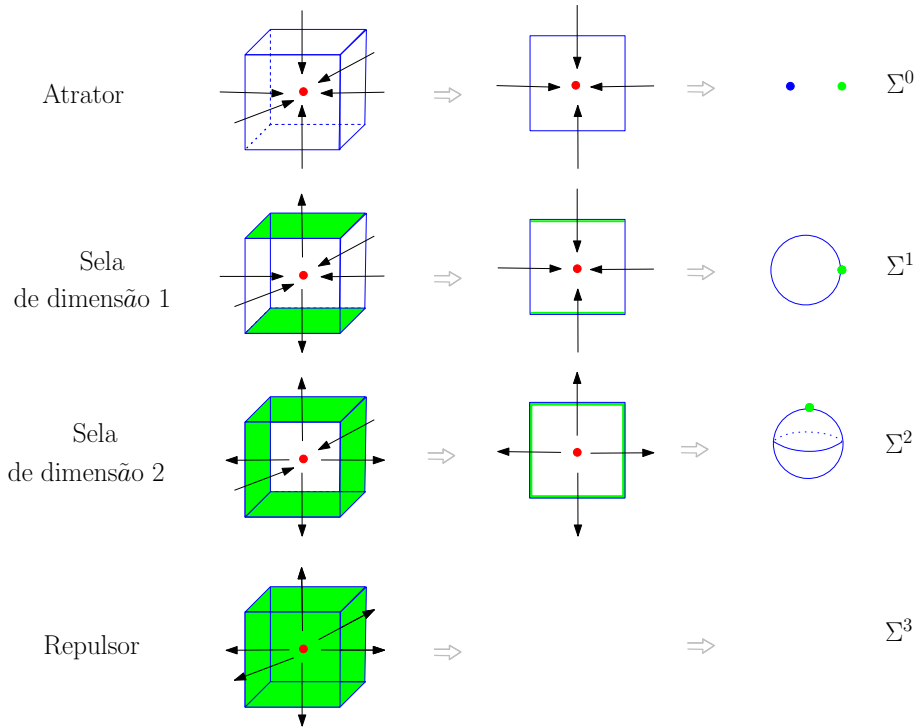


Figura 3.11: Par-índice e índice de Conley de singularidades em \mathbb{R}^3 .

3.1.2 Índice Homológico de Conley

Infelizmente, trabalhar com classes de homotopia de espaços topológicos é muito complicado. Sendo assim, é comum considerar um índice mais fraco que o índice homotópico de Conley, mas que é um invariante algébrico. Tal índice é definido a seguir:

Definição 3.6 (Índice homológico de Conley). *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e seja (N, L) um par-índice para S . O **índice homológico de Conley** é definido por*

$$Con_*(S, \varphi) := H_*(N/L) \approx H_*(N, L),$$

onde $H_n(N/L)$ denota o n -ésimo grupo de homologia do espaço pontuado $(N/\sim, [L])$.

Como os pares-índice para um conjunto invariante isolado tem o mesmo tipo de homotopia e como a homologia de espaços homotópicos são isomorfas, o índice homológico de Conley está bem definido, ou seja, não depende da escolha do par-índice; de fato, $Con_*(S, \varphi) = H_*(h(S))$.

Observação 3.2. *Não é verdade que dado qualquer par-índice (N, L) , $H_*(N/L) \approx H_*(N, L)$. No entanto, pode-se provar que sempre é possível encontrar um par-índice para o qual este isomorfismo seja verificado. Um par-índice com esta propriedade é chamado de **par-índice regular**. Para mais detalhes veja [18].*

Como para algumas técnicas algébricas é mais conveniente trabalhar com o par (N, L) diretamente ao invés de trabalhar com o espaço quociente, ao longo deste trabalho, assuma que os pares-índice são regulares.

Serão usadas as seguintes notações para o índice homológico de Conley de um conjunto invariante isolado S : $H(S)$ e $Con_*(S)$.

Exemplo 3.9. *Seja S uma singularidade com variedade instável de dimensão n . Foi visto que o índice homotópico de Conley de S é Σ^n , de modo que o índice homológico de Conley de S , com coeficientes em \mathbb{Z} é:*

$$Con_*(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = n \\ 0 & , \text{ se } k \neq n \end{cases}$$

△

A aplicabilidade do índice homológico de Conley depende essencialmente de três propriedades: a propriedade de Wazewski, de aditividade e de continuação.

Proposição 3.2 (Propriedade de Wazewski). *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ . Se $Con_*(S) \not\approx 0$ então $S \neq \emptyset$.*

Demonstração: A prova será feita por contrapositiva. Suponha que $S = \emptyset$, que é um conjunto invariante isolado por vacuidade, considere o par-índice (\emptyset, \emptyset) para S . Então $Con_*(S) \approx 0$. Ou seja, se $Con_*(S) \not\approx 0$ então $S \neq \emptyset$. \square

Um exemplo trivial do índice homológico de Conley é obtido da propriedade de Wazewski, se $S = \emptyset$ então $Con_*(S) = 0$.

Proposição 3.3 (Propriedade de Aditividade). *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ . Se $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos, então $Con_*(S) \approx Con_*(S_1) \oplus Con_*(S_2)$.*

Demonstração: Como S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos, existem vizinhanças isolantes disjuntas N_0 e N_1 tais que (N_0, L_0) e (N_1, L_1) são pares-índice para S_0 e S_1 , respectivamente. Daí,

$$\begin{aligned} Con_*(S) &= H_*(N_0 \cup N_1, L_0 \cup L_1) \\ &= H_*(N_0, L_0) \oplus H_*(N_1, L_1) \\ &= Con_*(S_0) \oplus Con_*(S_1). \end{aligned}$$

\square

Exemplo 3.10. Considere o conjunto invariante isolado $S = \{x, y\}$ do Exemplo 3.7. Como S é união disjunta de dois conjuntos invariantes isolados formados pelos pontos de sela x e y , então o índice homológico de S coincide com a soma direta dos índices homológicos de x e y . No Exemplo 3.9 foi calculado o índice homológico de singularidades, e portanto:

$$Con_*(S) = Con_*(\{x\}) \oplus Con_*(\{y\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & , \text{ se } k = 1 \\ 0 & , \text{ se } k \neq 1 \end{cases}$$

Veja que o índice homológico depende apenas do par-índice e não do conjunto invariante isolado. Como a sela de macaco 3.6, a conexão de pontos de sela, apresentada no Exemplo 3.8, e $S = \{x, y\}$ admitem o mesmo par-índice e portanto o mesmo índice homotópico, segue que o índice homológico destes conjuntos também coincidem. \triangle

Antes de enunciar a propriedade de continuação do índice homológico de Conley, é necessário a seguinte definição:

Definição 3.7. *Seja $\{\varphi_\lambda : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de fluxos parametrizada por um intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Sejam $N \subset X$ e $S_\lambda := \text{Inv}(N, \varphi_\lambda)$. Dois conjuntos invariantes isolados S_{λ_0} e S_{λ_1} são **relacionados por continuação** se N é uma vizinhança isolante para S_λ , com $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.*

Proposição 3.4 (Propriedade de Continuação). *Sejam S_{λ_0} e S_{λ_1} conjuntos invariantes isolados relacionados por continuação. Então,*

$$\text{Con}_*(S_{\lambda_0}) \approx \text{Con}_*(S_{\lambda_1}).$$

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada em [18].

A proposição acima afirma que conjuntos relacionados por continuação possuem o mesmo índice homológico de Conley. Deste modo, muitas vezes o cálculo do índice homológico de um conjunto invariante isolado complicado pode ser reduzido a algum caso mais simples.

O próximo exemplo ilustra como a Proposição 3.4 pode auxiliar no cálculo do índice homológico.

Exemplo 3.11. Dada a família de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y + (1 - \lambda)(x^2 - 1) \left(x + \frac{1}{2} \right) + \lambda(x - 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

parametrizadas por $\lambda \in [0, 1]$, seja φ_λ o fluxo gerado por este sistema, para cada $\lambda \in [0, 1]$.

Para $k > 0$ suficientemente grande, $N = [-k, k] \times [-k, k]$ é uma vizinhança isolante de $S_\lambda = \text{Inv}_{\varphi_\lambda}(N)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Desta maneira, S_0 está relacionado por continuação com S_1 , de onde tem-se $\text{Con}_*(S_{\lambda_0}) \approx \text{Con}_*(S_{\lambda_1})$.

Para $\lambda = 1$, o sistema 3.2 se resume a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= y + x - 1 \end{aligned}$$

E, portanto, o conjunto invariante isolado S_1 é constituído por apenas um ponto de sela.

Pelo Exemplo 3.9, segue que

$$Con_*(S_0) \approx Con_*(S_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } k = n \\ 0 & , \text{ se } k \neq n \end{cases}$$

△

Para mais detalhes do Exemplo 3.11 veja a referência [13].

3.2 Decomposição de Conjuntos Invariantes Isolados

Como foi visto, os objetos básicos de estudo da teoria de Conley são os conjuntos invariantes isolados. Há casos em que tais conjuntos apresentam comportamentos dinâmicos mais ricos. De modo a simplificar o estudo de tais conjuntos, considera-se decomposições destes conjuntos em conjuntos invariantes menores. Nesta seção, serão vistas a decomposição em par atrator-repulsor e, sua generalização, a de decomposição de Morse.

Ao longo desta seção, também serão introduzidos os conceitos de trio-índice para um par atrator-repulsor e filtração-índice para uma decomposição de Morse. Estes dois conceitos serão importantes para definir a matriz de conexão, o trio-índice é usado no caso de uma decomposição em par atrator-repulsor e a filtração-índice é usada no caso de uma decomposição de Morse mais geral.

3.2.1 Decomposição em Par Atrator-Repulsor

Como é esperado, o estudo das decomposições de conjuntos invariantes isolados começará pela decomposição em par atrator-repulsor. Seja $S \subset X$ um conjunto invariante isolado sob o fluxo φ .

Definição 3.8. Um subconjunto $A \subset S$ é um **atrator** (em relação a S) se existe uma vizinhança U de A em S tal que $\omega(U) = A$. Analogamente, $A \subset S$ é um **repulsor** (em relação a S) se existe uma vizinhança V de A em S tal que $\omega^*(V) = A$.

Um repulsor é um atrator para o fluxo reverso. Um conjunto atrator é um conjunto invariante isolado, o mesmo vale para um conjunto repulsor.

O lema a seguir fornece uma caracterização dos conjuntos atratores.

Lema 3.1. *Sejam S um conjunto invariante isolado sob o fluxo φ e A um subconjunto compacto invariante em S . Então A é um atrator em S se, e somente se, existe uma vizinhança U de A em S tal que $\varphi((-\infty, 0], \gamma) \not\subset U$ para todo $\gamma \in U \setminus A$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja U vizinhança de A em S tal que $A = \omega(U)$. Suponha, por absurdo, que $\gamma \in U \setminus A$ e $\varphi((-\infty, 0], \gamma) \subset U$. Disto e da definição de ω -limite, tem-se que $\mathcal{O}(\gamma) \subset \omega(U)$, ou seja, $\gamma \in \omega(U) = A$, contradição. Logo $\varphi((-\infty, 0], \gamma) \not\subset U$.

(\Leftarrow) Se U é uma vizinhança compacta de A em S tal que $\varphi((-\infty, 0], \gamma) \not\subset U$ para todo $\gamma \in U \setminus A$, então existe $t^* > 0$ tal que $\varphi([-t^*, 0], \gamma) \not\subset U$ para todo $\gamma \in U \cap \overline{S \setminus U}$. Agora, escolha uma vizinhança V de A tal que $\varphi([0, t^*], V) \subset U$. Então $\varphi([0, \infty), V) \subset U$ e daí $\omega(V) = A$. \square

Proposição 3.5. *Sejam $S \subset X$ um conjunto invariante isolado sob o fluxo φ e A um atrator em S . Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $\gamma \in S$ e $\omega^*(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, então $\gamma \in A$;*
2. *Se $\gamma \in S$ e $\omega(\gamma) \cap A \neq \emptyset$, então $\omega(\gamma) \in A$;*
3. *$A^* := \{\gamma \in S : \omega(\gamma) \cap A = \emptyset\}$ é um repulsor;*
4. *$A = \{\gamma \in S : \omega^*(\gamma) \cap A^* = \emptyset\}$;*
5. *Se $\gamma \in S$, então $\omega(\gamma) \cup \omega^*(\gamma) \subset A \cup A^*$;*
6. *Se A' é um atrator em A , então A' é um atrator em S .*

A demonstração da proposição acima não é complicada e pode ser encontrada em [18].

Definição 3.9. *Seja A um atrator em S . O repulsor A^* é chamado de **repulsor complementar** de A em S e o par (A, A^*) de **par atrator-repulsor** em S .*

Observe que A^* é o maior conjunto invariante de S disjunto do atrator A .

A Proposição 3.5 fornece uma descrição completa do comportamento das órbitas em S com relação a um par atrator-repulsor (A, A^*) . Seja $x \in S$ então uma das três condições abaixo é verificada pela órbita de x :

- $\mathcal{O}(x)$ pertence ao atrator A ;

- $\mathcal{O}(x)$ pertence ao repulsor complementar A^* ;
- $\mathcal{O}(x) \cap (A \cup A^*) = \emptyset$ e $\omega(x) \in A$ e $\alpha(x) \in A^*$, ou seja, a órbita de x “nasce” no repulsor A^* e “morre” no atrator A .

No terceiro caso, diz-se que a órbita de x conecta os conjuntos A e A^* , ou ainda, que é uma órbita de conexão entre A e A^* .

Definição 3.10. *Seja (A, A^*) um par atrator-repulsor em S . O conjunto das órbitas de conexão de S em relação ao par (A, A^*) é o conjunto*

$$C(A, A^*) := S \setminus (A \cup A^*).$$

Portanto, o par (A, A^*) decompõe o conjunto invariante isolado S na união

$$S = A \cup C(A, A^*) \cup A^*.$$

Esta decomposição é conhecida como **decomposição em par atrator-repulsor** de S . No Capítulo 4 é introduzida uma ferramenta, a matriz de conexão, que é utilizada para estudar o conjunto $C(A, A^*) \neq \emptyset$ das órbitas conectantes.

Um ponto $x \in S$ está em $C(A, A^*)$ se, e somente se, $\omega(x) \subset A$ e $\omega^*(x) \subset A^*$, ou seja, $C(A, A^*) = \{x \in S : \omega(x) \subset A \text{ e } \omega^*(x) \subset A^*\}$.

Exemplo 3.12. Considere a esfera 2-dimensional deformada S^2 e o fluxo gradiente negativo oriundo da função altura f , como mostra a Figura 3.12. Veja que S^2 é um conjunto invariante isolado, tomando $A = \{z, y', z'\} \cup C(z, y') \cup C(z', y')$ e $A^* = \{x, y, x'\} \cup C(y, x) \cup C(y, x')$, tem-se que A e A^* são invariantes e isolados. Além disso, (A, A^*) é um par atrator-repulsor em S^2 . △

Exemplo 3.13. Considere o fluxo no plano mostrado na Figura 3.13. Veja que o conjunto S formado pelo ponto de sela s , pelo ponto repulsor r e pela conexão entre estes dois pontos $C(s, r)$ é um conjunto invariante isolado que tem N como vizinhança isolante. É fácil ver que $A = \{s\}$ é um atrator em S e $A^* = \{r\}$ é seu repulsor complementar em S . De onde, (A, A^*) é um par atrator-repulsor em S . △

É interessante observar que, dado um conjunto invariante isolado S , este pode admitir várias decomposições em par atrator-repulsor distintas. O conjunto invariante isolado do

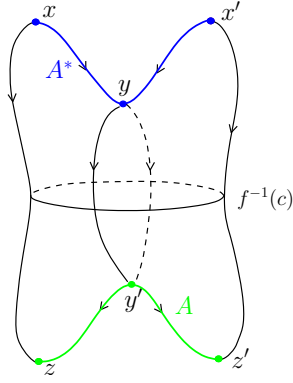
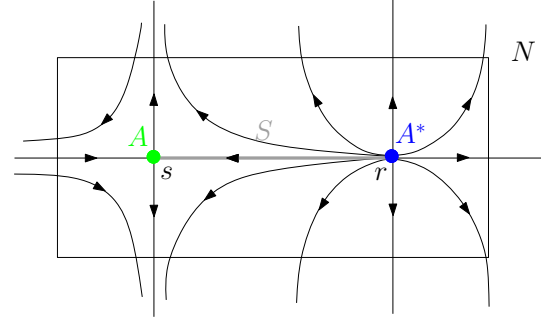

 Figura 3.12: Par atrator-repulsor para S^2 .


Figura 3.13: Par atrator-repulsor para a conexão de pontos de sela.

Exemplo 3.12 também admite como par atrator-repulsor o par (B, B^*) , onde $B^* = \{x, x'\}$ e $B = A \cup \{y\} \cup C(y, y')$, por exemplo.

Sejam A_1 e A_2 atratores em S . Então segue que $A_1 \cap A_2$ é um atrator em S , pelo Lema 3.1, e que $A_1^* \cup A_2^*$ é o repulsor complementar, pelo item 3 da Proposição 3.5. Por dualidade, $A_1 \cup A_2$ é um atrator em S e seu repulsor complementar é $A_1^* \cap A_2^*$.

Na Seção 3.1, foi visto que qualquer conjunto invariante isolado admite par-índice. Sendo (A, A^*) um par atrator-repulsor, os conjuntos A e A^* são invariantes isolados; desta maneira, pode-se associar a estes conjuntos pares-índice.

Definição 3.11. *Seja (A, A^*) uma par atrator-repulsor para um conjunto invariante isolado S . Um trio de conjuntos compactos (N_0, N_1, N_2) com $N_0 \subset N_1 \subset N_2$, é chamado de **trio-índice** para o par atrator-repulsor (A, A^*) se:*

1. (N_1, N_0) é par-índice para A ,
2. (N_2, N_1) é par-índice para A^* ,
3. (N_2, N_0) é par-índice para S .

Kurland estabelece em [10] que, dado um par atrator-repulsor (A, A^*) , sempre é possível encontrar compactos N_0 , N_1 e N_2 de modo que o trio (N_0, N_1, N_2) seja um trio-índice para o par (A, A^*) .

Proposição 3.6. *Sejam $N_0 \subset N_1 \subset N_2$ conjuntos compactos. Se (N_1, N_0) é par-índice para A e (N_2, N_0) é par-índice para S , então (N_2, N_1) é um par-índice para A^* .*

Exemplo 3.14. Retomando o Exemplo 3.12, onde é apresentado uma decomposição em par atrator-repulsor da esfera S^2 , considere a tripla de compactos (N_0, N_1, N_2) com $N_0 = \emptyset$,

$N_1 = \{p \in S^2 \mid f(p) \leq c\}$ e N_2 é a própria esfera. Veja que (N_1, N_0) é par-índice para A , (N_2, N_1) é par-índice para A^* e (N_2, N_0) é par-índice para S . Logo, (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para (A, A^*) . \triangle

Exemplo 3.15. Um trio-índice para o par atrator-repulsor visto no Exemplo 3.13 é dado pelos compactos na Figura 3.14. \triangle



Figura 3.14: Trio-índice para o par atrator-repulsor (A, A^*) do Exemplo 3.13.

3.2.2 Decomposição de Morse

Seja S um conjunto invariante isolado em X . Sejam A um atrator em S e A^* seu repulsor complementar. Foi visto que o par atrator-repulsor (A, A^*) em S decompõe S na união $S = A \cup C(A, A^*) \cup A^*$. A generalização desta ideia é uma decomposição de Morse para S .

Uma decomposição de Morse é formada, não só apenas por dois subconjuntos invariantes isolados e disjuntos de S , e sim por uma coleção finita M_π de subconjuntos invariantes isolados disjuntos de S , de modo que cada elemento de S pertence a algum M_π ou a alguma órbita que “nasce” em M_π e “morre” em $M_{\pi'}$ para certos π, π' .

Mas antes de definir decomposição de Morse é necessário um conhecimento básico sobre ordens parciais, que será introduzido agora.

Ordem Parcial

Ao longo deste trabalho, considere P um conjunto indexante finito com p elementos.

Definição 3.12. Uma *ordem parcial* em P é uma relação \prec entre os elementos de P satisfazendo:

1. para qualquer $\pi \in P$ nunca ocorre $\pi \prec \pi$;
2. se $\pi \prec \pi'$ e $\pi' \prec \pi''$, com $\pi, \pi', \pi'' \in P$ então $\pi \prec \pi''$.

Uma **ordem total** em P é uma ordem parcial em P que também satisfaz: para cada $\pi, \pi' \in P$ ou $\pi \prec \pi'$ ou $\pi' \prec \pi$.

Assuma que \prec é uma ordem parcial em P , denote por (P, \prec) o conjunto P munido com a ordem parcial \prec . Uma **extensão** de \prec é uma ordem parcial \prec^* em P tal que: $\pi \prec \pi' \Rightarrow \pi \prec^* \pi'$. Se \prec^* é uma ordem total em P então \prec^* é uma extensão linear de \prec . Se $P' \subset P$ então \prec induz uma ordem parcial em P' chamada de **restrição** de \prec a P' .

Um **intervalo** em (P, \prec) é um subconjunto $I \subset P$ que satisfaz a seguinte condição: se $\pi, \pi' \in I$ e $\pi \prec \pi'' \prec \pi'$ então $\pi'' \in I$. O conjunto dos intervalos em (P, \prec) será denotado por $\mathcal{I}(P, \prec)$ ou simplesmente por \mathcal{I} .

Um intervalo $I \in \mathcal{I}$ é um **intervalo atrator** se $\pi \in I$ e $\pi' \prec \pi$ implicam que $\pi' \in I$. O conjunto dos intervalos atratores de (P, \prec) é denotado por $\mathcal{A}(P, \prec)$ ou simplesmente por \mathcal{A} .

Definição 3.13. *Seja (P, \prec) um conjunto parcialmente ordenado. Dois elementos distintos π, π' de P são ditos **adjacentes** se $\{\pi, \pi'\} \in \mathcal{I}$.*

De forma mais geral:

Definição 3.14. *Seja (P, \prec) um conjunto parcialmente ordenado e considere \mathbb{Z} com a ordem usual $<$. Uma n -**upla** (I_1, \dots, I_n) de intervalos mutuamente disjuntos é dita **adjacente** se*

1. $\bigcup_{i=1}^n I_i \in \mathcal{I}$;
2. se $j < k$ e $\pi \in I_j, \pi' \in I_k$ então $\pi' \not\prec \pi$.

A coleção das n -uplas adjacentes de intervalos em (P, \prec) é denotada por $\mathcal{I}_n(P, \prec)$, ou apenas por \mathcal{I}_n . Note que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$. Se (I, J) é um par adjacente (ou seja, uma 2-upla adjacente) de intervalos então o intervalo $I \cup J$ será denotado por IJ .

O próximo resultado é relevante para a teoria de decomposição de Morse, desta forma, este é enunciado como proposição.

Proposição 3.7. *Seja (P, \prec) um conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Se \prec^* é uma extensão de \prec então $\mathcal{I}_n(P, \prec^*) \subset \mathcal{I}_n(P, \prec)$.*
2. *Se \prec^* é a restrição de \prec à um intervalo $J \in (P, \prec)$ então $\mathcal{I}_n(J, \prec^*) \subset \mathcal{I}_n(P, \prec)$.*

Demonstração: 1. Se $n = 1$: Seja $I \in \mathcal{I}(P, \prec^*)$, dados $\pi, \pi' \in I$ se $\pi'' \in P$ e $\pi \prec \pi'' \prec \pi'$, pela definição de extensão, $\pi \prec^* \pi'' \prec^* \pi'$, logo $\pi'' \in I$. Portanto, $I \in \mathcal{I}(P, \prec)$.

Se $n > 1$: Dado $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n(P, \prec^*)$, tem-se que $I_1 \cup \dots \cup I_n = I$ é um intervalo em $\mathcal{I}(P, \prec^*)$, logo $I \in \mathcal{I}(P, \prec)$, pelo caso $n = 1$. Agora, sejam $j < k$, $\pi \in I_j$ e $\pi' \in I_k$. Suponha por absurdo que $\pi' \prec \pi$, sendo \prec^* extensão de \prec , então $\pi' \prec^* \pi$, contradizendo o fato de $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n(P, \prec^*)$.

2. Se $n = 1$: Seja $I \in \mathcal{I}(J, \prec^*)$, dados $\pi, \pi' \in I \subset J$ se $\pi'' \in P$ e $\pi \prec \pi'' \prec \pi'$, então $\pi'' \in J$, já que J é um intervalo em (P, \prec) . Pela definição de restrição, $\pi \prec^* \pi'' \prec^* \pi'$, logo $\pi'' \in I$. Portanto, $I \in \mathcal{I}(P, \prec)$.

Se $n > 1$: Dado $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n(J, \prec^*)$, tem-se que $I_1 \cup \dots \cup I_n = I \in \mathcal{I}(J, \prec^*)$, logo $I \in \mathcal{I}(P, \prec)$, pelo caso $n = 1$. Agora, sejam $j < k$, $\pi \in I_j$ e $\pi' \in I_k$. Suponha por absurdo que $\pi' \prec \pi$, sendo \prec^* restrição de \prec e $\pi, \pi' \in J$, então $\pi' \prec^* \pi$, contradizendo o fato de $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n(J, \prec^*)$. \square

Se $\pi, \pi' \in P$ são tais que $\pi \not\prec \pi'$ e $\pi' \not\prec \pi$ então diz-se que π e π' são **elementos não comparáveis**. Se (I, J) e (J, I) são ambos pares adjacentes de intervalos, então I e J são ditos **intervalos não comparáveis**.

Se $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_n$ e $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$, então a n -upla (I_1, \dots, I_n) é chamada de uma decomposição do intervalo I . É claro que, se (I, J, K) é uma tripla adjacente de intervalos, então (I, J) , (J, K) , (IJ, K) e (I, JK) são todos pares adjacentes de intervalos.

Decomposição de Morse

A partir de agora, inicia-se o estudo das decomposições de Morse, generalizando a decomposição em par atrator-repulsor, vista na subseção anterior. Será visto que, para cada decomposição de Morse é possível associar uma coleção de conjuntos compactos que generalizam a noção de trio-índice para par atrator-repulsor.

Definição 3.15. *Sejam (P, \prec) um conjunto parcialmente ordenado, com P finito e S um conjunto invariante isolado. Uma decomposição de Morse \prec -ordenada de S é uma coleção $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ de conjuntos invariantes isolados de S mutuamente disjuntos com a seguinte propriedade: se $x \in S \setminus \bigcup_{\pi \in P} M_\pi$ então existem $\pi, \pi' \in P$ tais que $\pi \prec \pi'$ e $x \in C(M_\pi, M_{\pi'})$, onde*

$$C(M_\pi, M_{\pi'}) := \{x \in S \mid \omega^*(x) \subset M_{\pi'} \text{ e } \omega(x) \subset M_\pi\}.$$

Assim, uma decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ é uma coleção finita de conjuntos invariantes e compactos M_π mutuamente disjuntos cuja união contém todo o comportamento recorrente por cadeia de φ , ou seja, o conjunto recorrente por cadeias é precisamente o conjunto dos pontos que pertencem a todas as decomposições de Morse de S .

Observação 3.3. Como a coleção de conjuntos $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ pode ser uma decomposição de Morse para mais de um conjunto invariante, a estrutura (incluindo os índices) associada à decomposição de Morse do conjunto invariante S são definidos relativos ao conjunto S . No entanto, para simplificar a notação, será omitido referência a S na discussão de tais estruturas.

Exemplo 3.16. Seja $A_k = (\{1, 2, \dots, k\}, <)$ um conjunto ordenado, onde a ordem $<$ é a restrição da ordem usual nos naturais \mathbb{N} . Considere o fluxo no bitoro T mostrado na Figura 3.15, onde encontram-se três decomposições de Morse distintas para o mesmo fluxo no bitoro. A primeira decomposição $\mathcal{D}(T) = \{M_\pi\}_{\pi \in A_{14}}$ tem cada singularidade como um dos conjuntos de $\mathcal{D}(T)$. Já a terceira decomposição $\mathcal{D}(T) = \{M_\pi\}_{\pi \in A_2}$ é constituída por apenas dois conjuntos, veja que esta decomposição de Morse é, de fato, uma decomposição em par-atrator-repulsor. \triangle

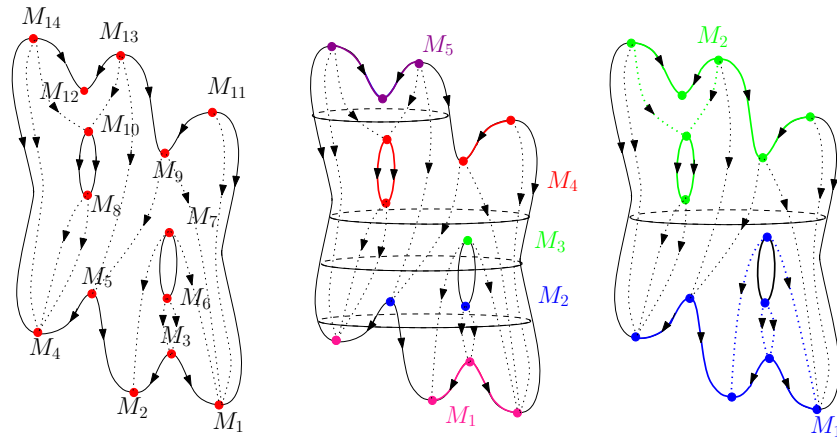


Figura 3.15: Decomposições de Morse para um fluxo no bitoro.

A partir deste exemplo, é natural perguntar se, dado um conjunto invariante isolado S , existe uma decomposição de Morse mais fina. O próximo exemplo mostra que a resposta é não.

Exemplo 3.17. Considere a equação

$$\dot{x} = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Seja $N = [-2, 2]$. Então, $Inv(N) = S = [-1, 1]$ é um conjunto invariante isolado. Pode-se definir decomposições de Morse para S da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(S) &= \{[-1, -1]\} \\ \mathcal{D}_2(S) &= \{-1\} \cup \{1\} \cup \{[-1/2, -1/2]\} \\ \mathcal{D}_3(S) &= \{-1\} \cup \{-1/2\} \cup \{1\} \cup \{1/2\} \cup \{[-1/3, -1/2]\} \\ \vdots &= \vdots \\ \mathcal{D}_n(S) &= \bigcup_{k=1}^{n-1} \{-1/k\} \bigcup_{k=1}^{n-1} \{1/k\} \cup \{[-1/n, -1/n]\} \end{aligned}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}_n(S)$ é uma decomposição de Morse de S com $2n - 1$ conjuntos e a decomposição de Morse se torna mais refinada à medida que n cresce. Como, por definição, uma decomposição de Morse pode consistir apenas de uma quantidade finita de conjuntos, não existe uma decomposição de Morse mais fina para S . \triangle

A proposição seguinte é consequência imediata da definição de decomposição de Morse:

Proposição 3.8. *Sejam \prec uma ordem parcial em P e $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse \prec -ordenada de S . Se \prec_1 é uma ordem parcial em P , então $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ é uma decomposição de Morse \prec_1 -ordenada de S se, e somente se, $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$ implica que $\pi \prec_1 \pi'$ para quaisquer $\pi, \pi' \in P$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$. Tome $x \in C(M_\pi, M_{\pi'})$. Como $\mathcal{D}(S)$ é uma decomposição de Morse \prec_1 -ordenada, então existem $p, p' \in P$ com $p \prec_1 p'$ e $x \in C(M_p, M_{p'})$. Logo,

$$\omega(x) \subset M_\pi \cap M_p \quad \text{e} \quad \omega^*(x) \subset M_{\pi'} \cap M_{p'}.$$

Como os conjuntos que formam a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ são disjuntos segue que $\pi = p$ e $\pi' = p'$. Portanto, $\pi \prec_1 \pi''$.

(\Leftarrow) Dado $x \in S \setminus \bigcup_{\pi \in P} M_\pi$, existem $\pi, \pi' \in P$ com $\pi \prec \pi''$ tais que $x \in C(M_\pi, M_{\pi'})$. Ora, por hipótese, sendo $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$ então $\pi \prec_1 \pi''$. De onde segue que $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ é uma decomposição de Morse \prec_1 -ordenada. \square

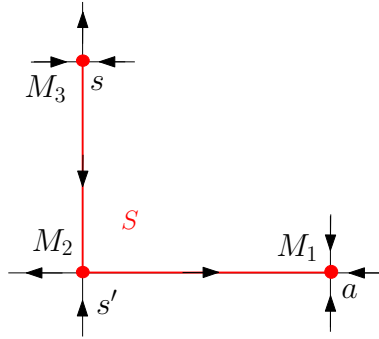
Assuma, ao longo deste trabalho, que $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ é uma decomposição de Morse \prec -ordenada de S . A ordem parcial \prec em P induz uma ordem parcial em $\mathcal{D}(S)$. Esta ordem, também denotada por \prec , é chamada de uma **ordem admissível** da decomposição de Morse. O fluxo em S define uma ordem parcial natural em P dada por:

Definição 3.16. *Seja $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse \prec -ordenada. A **ordem do fluxo**, denotada por $<_f$, é definida considerando que $\pi <_f \pi'$ se, e somente se, existe uma sequência de elementos distintos de P , $\pi = \pi_1, \dots, \pi_l = \pi'$ com $C(M_{\pi_j}, M_{\pi_{j+1}}) \neq \emptyset$, para $j \in \{1, \dots, l-1\}$.*

Em outras palavras, $\pi <_f \pi'$ sempre que $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$ e estende-se usando a transitividade.

Segue da Proposição 3.8 que $<_f$ é, de fato, uma ordem parcial em P e $\mathcal{D}(S)$ é uma decomposição de Morse $<_f$ -ordenada de S . A ordem do fluxo é uma ordem minimal em $\mathcal{D}(S)$, ou seja, tem o menor número de relações entre todas as outras ordens admissíveis.

Exemplo 3.18. Considere um fluxo em \mathbb{R}^2 que possui um conjunto invariante isolado S formado por uma conexão entre os pontos de sela s e s' e uma conexão entre o ponto de sela s' e o ponto atrator a , como na figura abaixo :



Considere ainda o conjunto ordenado $\{1, 2, 3\}$ com a seguinte ordem: $1 < 2 < 3$ e sejam $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{s'\}$ e $M_3 = \{s\}$. Veja que estes conjuntos forma uma decomposição de Morse \prec -ordenada, além disso, $<$ é a ordem do fluxo. \triangle

Proposição 3.9. *Toda ordem admissível em $\mathcal{D}(S)$ é uma extensão da ordem do fluxo.*

Demonstração: Seja \prec uma ordem admissível em $\mathcal{D}(S)$ e suponha que $\pi <_f \pi'$. Pela definição da ordem do fluxo, existe uma sequência $\pi = \pi_1, \dots, \pi_l = \pi'$ de elementos de P

tal que $C(M_{\pi_j}, M_{\pi_{j+1}}) \neq \emptyset$, para $j = 1, \dots, l$. Pela Proposição 3.8, $\pi_j \prec \pi_{j+1}$, para todo $j \in \{1, \dots, l-1\}$. Portanto, $\pi \prec \pi'$ e segue o resultado. \square

Associado a uma ordem admissível \prec de $\mathcal{D}(S)$ existe uma coleção de conjuntos, chamados de **conjuntos de Morse**, definidos por

$$M_I := \left(\bigcup_{\pi \in I} M_\pi \right) \cup \left(\bigcup_{\pi, \pi' \in I} C(M_\pi, M_{\pi'}) \right),$$

onde I é um intervalo. Veja que os conjuntos M_π que constituem a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ também são conjuntos de Morse, já que $\{\pi\}$ é um intervalo, para todo $\pi \in P$.

Como cada ordem admissível de uma decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ é uma extensão da ordem do fluxo, tem-se $\mathcal{I}(\prec) \subset \mathcal{I}(\prec_f)$. Daí, a coleção de conjuntos de Morse da ordem do fluxo contém os conjuntos de Morse de qualquer ordem admissível.

Proposição 3.10. *Seja $\mathcal{D}(S)$ uma decomposição de Morse \prec -ordenada de S , onde S é um conjunto invariante isolado.*

1. *Se $J \in \mathcal{I}(\prec)$ então existe um intervalo $K \in \mathcal{A}(\prec)$ tal que $(K \setminus J, J)$ é uma decomposição de K e $K \setminus J \in \mathcal{A}(\prec)$.*
2. *Se I é um intervalo atrator em (P, \prec) , então M_I é um atrator em S com complementar repulsor $M_{P \setminus I}$.*

Demonstração:

1. Basta tomar $K = \{\pi \mid \text{existe } \pi' \in J \text{ com } \pi < \pi' \text{ ou } \pi = \pi'\}$.

2. A demonstração é feita por indução sobre a ordem da decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$. Se $\mathcal{D}(S)$ é uma decomposição de Morse com apenas um conjunto então o resultado vale. Suponha que o resultado vale para toda decomposição de Morse de ordem $m-1$ e seja $\mathcal{D}(S)$ uma decomposição de Morse de ordem m . Sejam $I \in \mathcal{A}(\prec)$ e κ um elemento minimal de I , ou seja, não existe $\pi \in I$ tal que $\pi < \kappa$.

Afirmção: M_κ é um atrator em S .

De fato, seja U uma vizinhança compacta de M_κ em S disjunta de $\cup M_\pi$, onde a união percorre o conjunto $\{\pi \in P \setminus \kappa\}$, tal vizinhança existe pois M_κ é um conjunto invariante isolado. Seja $\nu \in U \setminus M_\kappa$. Então $\omega^*(\nu) \subset \cup_{\pi \in P \setminus \kappa} M_\pi$. Caso contrário, $\omega^*(\nu) \subset M_\kappa$. Seja π tal que $\omega(\nu) \subset M_\pi$. Como κ é minimal então π não pode estar em $I \setminus \kappa$ e como I é um intervalo

atrator então π não pode estar em $P \setminus I$. Logo $\pi = \kappa$, ou seja $\omega(\nu) \subset M_\kappa$. Mas isto contradiz o fato de $\nu \in U \setminus M_\kappa$. Logo $\omega^*(\nu) \subset \bigcup_{\pi \in P \setminus \kappa} M_\pi$. Segue que $\omega^*(\nu) \not\subset U$ e, pelo Lema 3.1, M_κ é um atrator em S . E $M_{P \setminus \kappa}$ é o repulsor complementar de M_κ em S .

Seja \prec_* a restrição de \prec à $P \setminus \kappa$. Então $\{M_\pi \mid \pi \in P \setminus \kappa\}$ é uma decomposição de Morse \prec_* -ordenada. Por hipótese de indução, $M_{I \setminus \kappa}$ é um atrator em $M_{P \setminus \kappa}$. E $M_{P \setminus I}$ é o repulsor complementar de $M_{I \setminus \kappa}$ em $M_{P \setminus \kappa}$. Como $M_{P \setminus \kappa}$ é repulsor em S e $M_{P \setminus I}$ é repulsor em $M_{P \setminus \kappa}$ então pela proposição 3.5 $M_{P \setminus I}$ é repulsor em S . Logo M_I é atrator em S . \square

Franzosa mostra em [7] que todo conjunto de Morse é um conjunto invariante isolado. A demonstração do próximo resultado encontra-se em [7].

Proposição 3.11. *Seja $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse em S e $I \in \mathcal{I}$. Então*

1. *$\{M_\pi \mid \pi \in I\}$ é uma decomposição de Morse \prec_I -ordenada de M_I , onde \prec_I é a restrição de \prec a I .*
2. *$\{M_\pi \mid \pi \in P \setminus I\} \cup \{M_I\}$ é uma decomposição de Morse de S .*

Como consequência deste resultado:

Corolário 3.1. *Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ então (M_I, M_J) é um par atrator-repulsor em M_{IJ} .*

O trio-índice para um par atrator-repulsor é generalizado pela noção de filtração-índice para uma ordem admissível em uma decomposição de Morse; da seguinte maneira:

Definição 3.17. *Uma **filtração-índice** para uma decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$, segundo a ordem admissível \prec , é uma coleção de conjuntos compactos $\mathcal{N} = \{N_I\}_{I \in \mathcal{A}(\prec)}$ satisfazendo:*

1. *para cada $I \in \mathcal{A}(\prec)$, (N_I, N_\emptyset) é um par-índice para o atrator M_I ;*
2. *para quaisquer $I, J \in \mathcal{A}(\prec)$, $N_{I \cap J} = N_I \cap N_J$ e $N_{I \cup J} = N_I \cup N_J$.*

Assuma que $\mathcal{N} = \{N_I\}_{I \in \mathcal{A}(\prec)}$ é uma filtração-índice para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$, segundo a ordem admissível \prec . A primeira propriedade da Definição 3.17 garante que \mathcal{N} contém ao menos um par-índice para cada conjunto de Morse M_I sempre que I for um intervalo atrator. Na realidade, uma filtração-índice fornece ao menos um par-índice para cada conjunto de Morse M_J , sendo J um intervalo atrator ou não. É o que garante o próximo resultado:

Proposição 3.12. *Seja \mathcal{N} uma filtração-índice para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, segundo a ordem admissível \prec . Seja ainda $J \in \mathcal{I}$.*

1. *Se (I, J) é uma decomposição de um intervalo atrator $K \in \mathcal{A}$, então (N_K, N_I) é um par-índice para M_J .*
2. *Se (I_i, J) é uma decomposição de um intervalo atrator K_i , para $i = 1, 2$, então $N_{K_1} \setminus N_{I_1} = N_{K_2} \setminus N_{I_2}$.*

Demonstração:

1. Veja que, pela definição de filtração-índice, $N_\emptyset \subset N_I \subset N_K$ além disso, (N_I, N_\emptyset) e (N_K, N_\emptyset) são pares-índice para M_I e M_K , respectivamente. Já o Corolário 3.1 garante que (M_I, M_J) é um par atrator-repulsor em M_K . Segue da Proposição 3.6 que (N_K, N_I) é um par-índice para M_J .

2. Sejam $K := K_1 \cap K_2$ e $I := I_1 \cap I_2$. Veja que $I, K \in \mathcal{A}$, pois $I_i, K_i \in \mathcal{A}$ para $i = 1, 2$, além disso (I, J) é uma decomposição de K , pois $I \cup J = (I_1 \cup J) \cup (I_2 \cup J) = K_1 \cap K_2 = K$. Para finalizar a prova, é suficiente mostra que $N_K \setminus N_I = N_{K_1} \setminus N_{I_1}$. Note que $K_1 = K \cup I_1$ e $K \cap I_1 = I$, pois

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 \cup J = I_1 \cup K_1 \cup K_2 = I_1 \cup K, \\ I &= I_1 \cap I_2 = I_1 \cap I_2 \cap J = I_1 \cap K. \end{aligned}$$

Pela propriedade 2 da Definição 3.17 tem-se $N_{K_1} = N_K \cup N_{I_1}$ e $N_K \cap N_{I_1} = N_I$. Estas igualdades implicam que $N_{K_1} \setminus N_{I_1} = N_K \setminus N_I = N_K \setminus N_I$. \square

Agora, se $J \in \mathcal{I}$ é um intervalo qualquer, as Proposições 3.10 (1) e 3.12 implicam que, em uma filtração-índice \mathcal{N} de $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, existe um par-índice (N_K, N_I) para o conjunto de Morse M_J . Além disso, se (N_K, N_I) e $(N_{\tilde{K}}, N_{\tilde{I}})$ são dois pares-índice definidos por \mathcal{N} então existe uma equivalência homotópica entre os espaços N_K/N_I e $N_{\tilde{K}}/N_{\tilde{I}}$.

Franzosa estabelece em [7] a existência de filtrações-índice.

Proposição 3.13. *Para toda decomposição de Morse $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ existe uma filtração-índice \mathcal{N} .*

Para finalizar este capítulo, segue um exemplo de filtração-índice.

Exemplo 3.19. Considere novamente o conjunto invariante isolado do Exemplo 3.18. Seja $P = \{1, 2, 3\}$ um conjunto com ordem $1 < 2 < 3$.

O propósito deste exemplo é exibir uma filtração-índice para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S) = \{M_i\}_{i \in P}$ <-ordenada, onde $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{s'\}$ e $M_3 = \{s\}$.

Nesse sentido, veja que os intervalos atratores de $(P, <)$ são: $I_0 = \emptyset$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$ e $I_3 = \{1, 2, 3\}$. Observe que os conjuntos de Morse M_I , onde $I \in \mathcal{A}$, são dados por: $M_{I_0} = \emptyset$, $M_{I_1} = M_1$, $M_{I_2} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_1, M_2)$ e $M_{I_3} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup C(M_1, M_2) \cup C(M_2, M_3)$.

Considere os conjuntos compactos N_{I_0} , N_{I_1} , N_{I_2} e N_{I_3} dados na Figura 3.16.

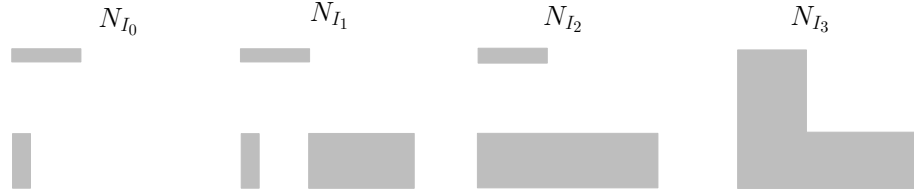


Figura 3.16: Filtração-índice para a decomposição de Morse $\{M_1, M_2, M_3\}$.

Veja que os compactos dados pela Figura 3.16 são tais que:

- (N_{I_1}, N_{I_0}) é par-índice para M_{I_1} ;
- (N_{I_2}, N_{I_0}) é par-índice para M_{I_2} ;
- (N_{I_3}, N_{I_0}) é par-índice para M_{I_3} .

A Figura 3.17 ilustra tais pares-índice.

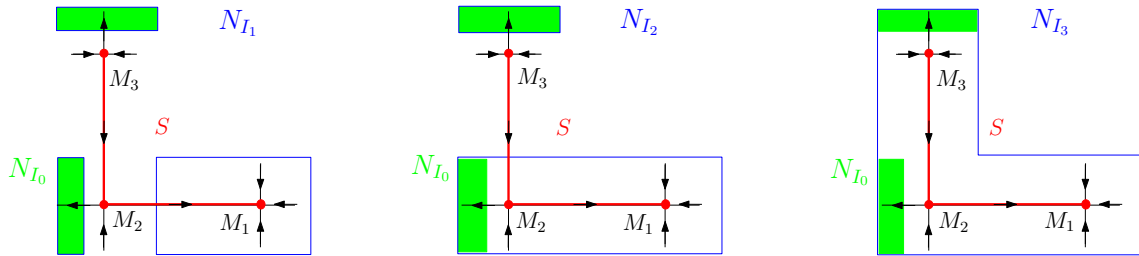


Figura 3.17: Pares-índice para os conjuntos de Morse M_1 , M_2 e M_3 , respectivamente.

É fácil verificar que os compactos N_{I_0} , N_{I_1} , N_{I_2} e N_{I_3} satisfazem: $N_{I_k \cap I_l} = N_{I_k} \cap N_{I_l}$ e $N_{I_k \cup I_l} = N_{I_k} \cup N_{I_l}$, para $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Logo, o conjunto $\mathcal{N} = \{N_{I_0}, N_{I_1}, N_{I_2}, N_{I_3}\}$ é uma filtração-índice para a decomposição de Morse $\{M_1, M_2, M_3\}$, segundo a ordem $<$. \triangle

Capítulo 4

Matriz de Conexão

Para descrever completamente a dinâmica de um conjunto invariante isolado S para o qual tem-se uma decomposição de Morse \mathcal{M}_π , é necessário entender as órbitas conectantes entre os conjuntos de Morse. Isto pode ser feito relacionado os índices de Conley dos conjuntos de Morse com o índice de Conley do conjunto invariante isolado S . Neste capítulo será construído a ferramenta algébrica, chamada matriz de conexão e criada por Franzosa, para estudar tais conexões.

A matriz de conexão é definida, de modo geral, como sendo uma matriz que tem como entradas aplicações entre os índices homológicos de Conley dos conjuntos \mathcal{M}_π . A importância da matriz de conexão no estudo da dinâmica de um fluxo sobre um conjunto invariante isolado está no fato de que suas entradas não nulas podem detectar a existência de órbitas conectantes entre conjuntos de Morse.

Este capítulo contém duas seções. Na primeira seção, é construída a matriz de conexão para uma decomposição em par atrator-repulsor de S . Na segunda seção, generaliza-se a ideia de matriz de conexão para o caso de uma decomposição de Morse qualquer, já que uma decomposição de Morse contém vários pares atrator-repulsor.

Mas antes é imprescindível adquirir conhecimento básico sobre tranças de complexos de cadeia e tranças de módulos graduados. Essas tranças generalizam, respectivamente, as noções de sequências exatas de complexos de cadeia e de sequências exatas em homologia.

Definição 4.1. *Sejam C_1 , C_2 e C_3 complexos de cadeia. A sequência*

$$C_1 \xrightarrow{i} C_2 \xrightarrow{p} C_3$$

é uma **sequência fracamente exata** se:

1. i é injetiva;
2. $p \circ i = 0$;
3. a aplicação de cadeia $\rho : C_2/\text{im}(p) \rightarrow C_3$ definido por p induz um isomorfismo em homologia.

Lembre que, dada uma sequência exata curta de complexos de cadeia

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0,$$

existe um homomorfismo de grau -1 , $\partial : H(C) \rightarrow H(A)$, chamado de homomorfismo de conexão (Teorema 1.3). Para sequências fracamente exatas também existe um homomorfismo de conexão. Mais precisamente:

Proposição 4.1. *Dada uma sequência fracamente exata de complexos de cadeia*

$$C_1 \xrightarrow{i} C_2 \xrightarrow{p} C_3$$

existe um homomorfismo natural $\partial : H(C_3) \rightarrow H(C_1)$ de grau -1 tal que a sequência

$$\cdots \rightarrow H(C_1) \xrightarrow{i_*} H(C_2) \xrightarrow{p_*} H(C_3) \xrightarrow{\partial} H(C_1) \rightarrow \cdots$$

*é exata. Este homomorfismo é chamado de **homomorfismo de conexão**.*

A prova desta proposição encontra-se em [8].

Considere, ao longo deste capítulo, (P, \prec) um conjunto finito parcialmente ordenado.

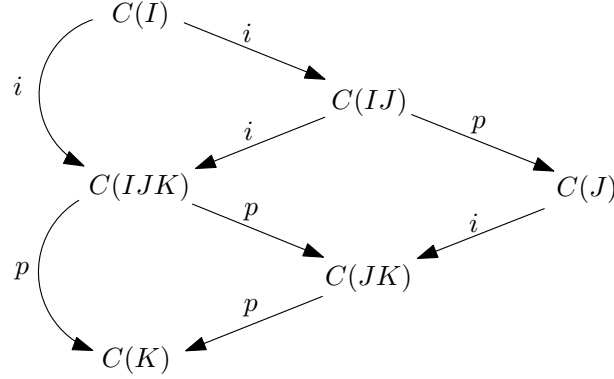
Definição 4.2. *Uma **trança de complexos de cadeia** segundo a ordem parcial \prec é uma coleção $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\prec)$ que consisti de complexos de cadeia e aplicações de cadeia satisfazendo:*

1. *para cada $I \in \mathcal{I}(\prec)$ existe um complexo de cadeia $C(I)$,*
2. *para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$ existem aplicações de cadeia*

$$i(I, IJ) : C(I) \rightarrow C(IJ), \quad p(IJ, J) : C(IJ) \rightarrow C(J)$$

que satisfazem:

- (i) a sequência de complexos de cadeia $C(I) \xrightarrow{i} C(IJ) \xrightarrow{p} C(J)$ é fracamente exata;
- (ii) se I e J são não comparáveis, então $p(JI, I)i(I, IJ) = \text{id}|_{C(I)}$;
- (iii) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3(\prec)$, então o seguinte diagrama de tranças comuta:



E agora segue a definição de trança de módulos graduados, que é essencial para a definição de matriz de conexão.

Definição 4.3. Uma **trança de módulos graduados** segundo a ordem parcial \prec é uma coleção $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\prec)$ que consisti de módulos graduados e aplicações entre os módulos graduados satisfazendo:

1. para cada $I \in \mathcal{I}(\prec)$ existe um módulo graduado $G(I)$,
2. para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$ existem aplicações

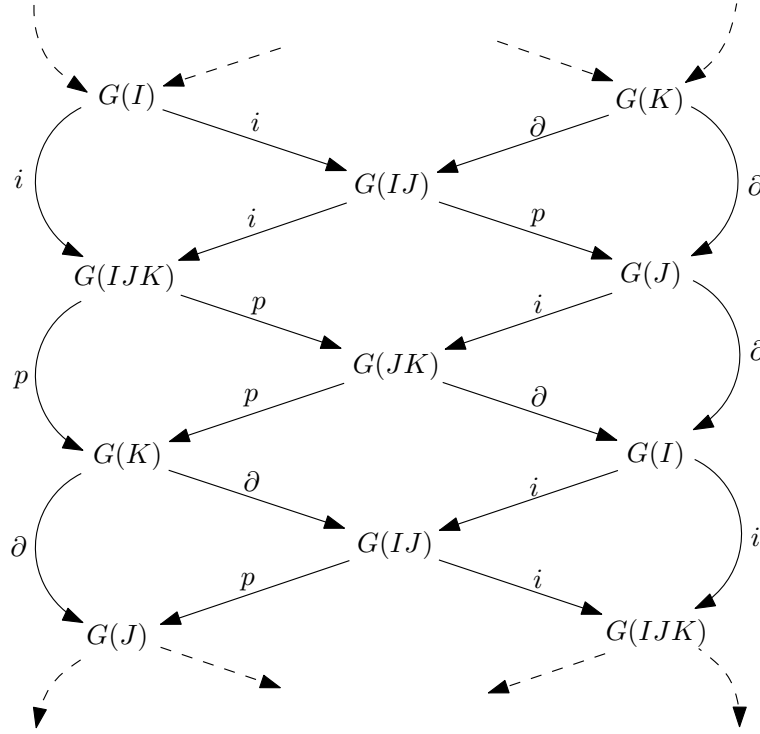
$$i(I, IJ) : G(I) \longrightarrow G(IJ) \quad \text{de grau } 0,$$

$$p(IJ, J) : G(IJ) \longrightarrow G(J) \quad \text{de grau } 0,$$

$$\partial(J, I) : G(J) \longrightarrow G(I) \quad \text{de grau } -1,$$

que satisfazem:

- (i) a sequência $\cdots \longrightarrow G(I) \xrightarrow{i} G(IJ) \xrightarrow{p} G(J) \xrightarrow{\partial} G(I) \longrightarrow \cdots$ é exata;
- (ii) se I e J são não comparáveis, então $p(JI, I)i(I, IJ) = \text{id}|_{G(I)}$;
- (iii) se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3(\prec)$, então o seguinte diagrama de tranças comuta:



Para as próximas seções é necessário definir quando duas tranças de módulos graduados são isomorfos:

Definição 4.4. *Sejam \mathcal{G} e \mathcal{G}' duas tranças de módulo graduado segundo a ordem parcial \prec . Uma aplicação Θ entre \mathcal{G} e \mathcal{G}' , denotada por $\Theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$, é uma coleção de homomorfismos de módulos $\theta(I) : G(I) \rightarrow G'(I)$, com $I \in \mathcal{I}(\prec)$, tais que, para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & G(I) & \xrightarrow{i} & G(IJ) & \xrightarrow{p} & G(J) & \xrightarrow{\partial} & G(I) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \theta(I) & & \downarrow \theta(IJ) & & \downarrow \theta(J) & & \downarrow \theta(I) & & \\
 \cdots & \longrightarrow & G'(I) & \xrightarrow{i} & G'(IJ) & \xrightarrow{p} & G'(J) & \xrightarrow{\partial} & G'(I) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Se $\theta(I)$ é um isomorfismo, para cada $I \in \mathcal{I}_2(\prec)$, então Θ é dito um **isomorfismo de tranças de módulos graduados**, e diz-se que \mathcal{G} e \mathcal{G}' são **tranças isomorfas**.

Veja que a trança de complexos de cadeia generaliza a noção de sequência fracamente exata de complexos de cadeia e a trança de módulos generaliza a ideia de sequência longa exata em homologia. Pela Proposição 4.1, cada sequência fracamente exata de complexos de cadeia induz uma sequência longa exata em homologia. De fato, cada trança de complexos de cadeia define uma trança de módulos graduados.

Seja \mathcal{C} uma trança de complexos de cadeia sobre \prec . Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$, pela definição de trança de complexos de cadeia, a sequência

$$C(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} C(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} C(J)$$

é fracamente exata. Associada a uma sequência fracamente exata, a Proposição 4.1 garante que existe uma sequência longa exata em homologia

$$\cdots \longrightarrow H(I) \xrightarrow{i_*(I,IJ)} H(IJ) \xrightarrow{p_*(IJ,J)} H(J) \xrightarrow{\partial(J,I)} H(I) \longrightarrow \cdots \quad (4.1)$$

Considere a coleção $\mathcal{HC}(\prec)$ consistindo dos módulos graduados $H(I)$ para cada intervalo $I \in \mathcal{I}(\prec)$, juntamente com as aplicações $i(I, IJ)$, $p(IJ, J)$, $\partial(J, I)$ definidas pela sequência (4.1), para cada par $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$.

Franzosa prova em [8] que:

Proposição 4.2. *$\mathcal{HC}(\prec)$ é uma trança de módulos graduados segundo a ordem parcial \prec .*

Portanto, para cada trança de complexos de cadeia, é possível associar uma trança de módulos graduados, como foi afirmado anteriormente.

Definição 4.5. *Seja \mathcal{C} uma trança de complexos de cadeia, a trança \mathcal{HC} recém construída é dita **trança de módulos graduados gerada por \mathcal{C}** . Além disso, se \mathcal{G} é uma trança de módulos graduados isomorfa a \mathcal{HC} , então \mathcal{G} é dita gerada por complexos de cadeia.*

A trança de módulos graduados é essencial para a construção da matriz de conexão. E a trança de complexos de cadeia é a estrutura suporte que é necessária para a prova da existência da matriz de conexão.

4.1 Matriz de Conexão para um Par Atrator-Repulsor

Para a discussão a seguir, fixe um módulo G . Dado um espaço topológico X , represente por $C_*(X)$ as cadeias singulares de X com coeficientes no módulo G e denote por $H_*(X)$ a homologia corresponde do complexo. E notação similar é usada para um par de espaços $A \subset X$.

Denote por $H(S)$ o índice homológico de S , ou seja, $H(S) = H_*(h(S))$. Note que se (N, L) é um par-índice para S , então existe uma identificação natural entre $H(S)$ e $H_*(N/L)$.

Seja (N_0, N_1, N_2) um trio-índice para um par atrator-repulsor (A, A^*) em S . Considere as aplicações induzidas nos espaços pontuados

$$N_1/N_0 \xrightarrow{i} N_2/N_0 \xrightarrow{p} N_2/N_1, \quad (4.2)$$

onde a inclusão i e a projeção p são definidas, respectivamente, por:

$$i([x]_{N_0}^{N_1}) = [x]_{N_0}^{N_2}, \quad p([x]_{N_0}^{N_2}) = [x]_{N_1}^{N_2} \cdot^1$$

Veja que $p \circ i = 0$.

Passando para o nível de cadeias, obtém-se de (4.2) a seguinte sequência de complexos de cadeia:

$$C_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i_\#} C_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p_\#} C_*(N_2/N_1). \quad (4.3)$$

Sendo i injetiva e $p \circ i = 0$, $i_\#$ é injetiva e $p_\# \circ i_\# = 0$. Além disso, a aplicação quociente

$$p : N_2/N_0 \longrightarrow N_2/N_1 \approx \frac{N_2/N_0}{N_1/N_0}$$

define a aplicação de cadeia $\rho : C_*(N_2/N_0, N_1/N_0) \longrightarrow C_*(N_2/N_1)$ que, por sua vez, induz o isomorfismo em homologia $\rho_* : H_*(N_2/N_0, N_1/N_0) \longrightarrow H_*(N_2/N_1)$ (ver [7]). Assim (4.3) é uma sequência fracamente exata e, pela Proposição 4.1, associada à sequência (4.3) existe uma sequência longa exata:

$$\cdots \longrightarrow H_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i_*} H_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p_*} H_*(N_2/N_1) \xrightarrow{\partial} H_*(N_1/N_0) \longrightarrow \cdots$$

Agora, seja (L_1, L_2, L_3) outro trio-índice para o par atrator-repulsor (A, A^*) . Como as homologias de espaços com o mesmo tipo de homotopia são isomorfas (Teorema 1.2), segue da invariância do par-índice que:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_*(N_1/N_0) & \xrightarrow{i_*} & H_*(N_2/N_0) & \xrightarrow{p_*} & H_*(N_2/N_1) & \xrightarrow{\partial} & H_*(N_1/N_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \updownarrow \approx & & \updownarrow \approx & & \updownarrow \approx & & \updownarrow \approx & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_*(L_1/L_0) & \xrightarrow{i'_*} & H_*(L_2/L_0) & \xrightarrow{p'_*} & H_*(L_2/L_1) & \xrightarrow{\partial'} & H_*(L_1/L_0) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

¹A notação $[x]_{N_j}^{N_k}$, introduzida aqui, denota a classe de equivalência de $x \in N_k$ segundo a relação de equivalência definida em 3.1.

Deste modo, tem-se a sequência longa exata

$$\cdots \longrightarrow H_*(A) \xrightarrow{i(A,S)} H_*(S) \xrightarrow{p(S,A^*)} H_*(A^*) \xrightarrow{\partial(A^*,A)} H_*(A) \longrightarrow \cdots. \quad (4.4)$$

Definição 4.6. A sequência longa exata definida em (4.4) é chamada de **sequência exata do índice homológico** associada ao par atrator-repulsor (A, A^*) e a aplicação de conexão $\partial(A^*, A) : H(A^*) \rightarrow H(A)$ recebe o nome de **aplicação bordo** definida pelo fluxo.

A aplicação $\partial(A^*, A)$ definida acima prover informações sobre o conjunto de órbitas conexas de A^* para A em S . O final desta seção aborda essa questão.

Considere agora os seguinte módulos graduados:

$$\begin{aligned} C\Delta(A) &= H(A), \\ C\Delta(A^*) &= H(A^*), \\ C\Delta(S) &= H(A) \oplus H(A^*). \end{aligned}$$

Uma aplicação $\Delta : C\Delta(S) \longrightarrow C\Delta(S)$ pode ser representada na forma matricial por:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(A) & \Delta(A^*, A) \\ \Delta(A, A^*) & \Delta(A^*) \end{pmatrix},$$

onde $\Delta(A) : C\Delta(A) \rightarrow C\Delta(A)$, $\Delta(A^*) : C\Delta(A^*) \rightarrow C\Delta(A^*)$, $\Delta(A, A^*) : C\Delta(A) \rightarrow C\Delta(A^*)$ e $\Delta(A^*, A) : C\Delta(A^*) \rightarrow C\Delta(A)$.

Considerando o caso particular em que $\Delta(A)$, $\Delta(A^*)$ e $\Delta(A, A^*)$ são aplicações nulas e $\Delta(A^*, A)$ é a aplicação bordo definida pelo fluxo, ou seja $\partial(A^*, A)$, tem-se que Δ é uma aplicação bordo, isto é, todas as entradas de Δ são aplicações de grau -1 e $\Delta \circ \Delta = 0$. Assim, $(C\Delta(S), \Delta)$ é um complexo de cadeia que possui os seguintes subcomplexos: $(C\Delta(A), 0)$ e $(C\Delta(A^*), 0)$.

A partir destes complexos de cadeia, pode-se construir a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeia:

$$0 \longrightarrow C\Delta(A) \xrightarrow{\bar{i}} C\Delta(S) \xrightarrow{\bar{p}} C\Delta(A^*) \longrightarrow 0, \quad (4.5)$$

onde \bar{i} e \bar{p} são a inclusão canônica e a projeção canônica, respectivamente. Esta sequência é a mesma que

$$0 \longrightarrow H(A) \xrightarrow{\bar{i}} H(A) \oplus H(A^*) \xrightarrow{\bar{p}} H(A^*) \longrightarrow 0.$$

Passando para homologia, (4.5) induz a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H\Delta(A) \xrightarrow{\bar{i}_*} H\Delta(S) \xrightarrow{\bar{p}_*} H\Delta(A^*) \xrightarrow{\bar{\partial}} H\Delta(A) \rightarrow \cdots, \quad (4.6)$$

onde $H\Delta(A)$, $H\Delta(A^*)$ e $H\Delta(S)$ denotam, respectivamente, as homologias dos seguintes complexos de cadeia $(C\Delta(A), 0)$, $(C\Delta(A^*), 0)$ e $(C\Delta(S), \Delta)$.

Até aqui, foram obtidas duas sequências longas exatas em homologia, a sequência exata do índice homológico (4.4) e a sequência (4.6) construída logo acima a partir da aplicação Δ . Essas duas sequências relacionam-se de forma interessante, elas são isomorfas.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n\Delta(A) = \frac{\ker \Delta_n(A)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(A)} = \frac{\ker 0}{\operatorname{im} 0} = \frac{H_n(A)}{0} \approx H_n(A),$$

$$H_n\Delta(A^*) = \frac{\ker \Delta_n(A^*)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(A^*)} = \frac{\ker 0}{\operatorname{im} 0} = \frac{H_n(A^*)}{0} \approx H_n(A^*),$$

ou seja, $H\Delta(A)$ e $H\Delta(A^*)$ são isomorfos aos índices homológicos de Conley de A e A^* , respectivamente. Logo, $\partial = \bar{\partial}$.

No momento, obtém-se o seguinte diagrama comutativo de homologias de módulos e aplicações:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H\Delta(A) & \xrightarrow{i} & H\Delta(S) & \xrightarrow{p} & H\Delta(A^*) & \xrightarrow{\partial} & H\Delta(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \text{id} & & & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H(A) & \xrightarrow{i} & H(S) & \xrightarrow{p} & H(A^*) & \xrightarrow{\partial} & H(A) & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (4.7)$$

É fácil ver que existem $\theta_n : H_n\Delta(S) \rightarrow H_n(S)$ que fazem o diagrama (4.7) comutar. Pelo Five Lemma (Teorema 1.4) as aplicações $\theta_n(S)$ são isomorfismos.

Portanto o complexo $(H(A) \oplus H(A^*), \Delta)$ gera uma sequência longa exata em homologia que é isomorfa à sequência do índice homológico do par (A, A^*) . Logo, a matriz Δ contém informações sobre o conjuntos de órbitas conectantes $C(A, A^*)$. Esta matriz é chamada de matriz de conexão para o par atrator-repulsor (A, A^*) .

Definição 4.7. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e (A, A^*) um par atrator-repulsor de S . Considere o módulo graduado*

$$C\Delta(S) = H(A) \oplus H(A^*)$$

e a aplicação bordo $\Delta : C\Delta(S) \rightarrow C\Delta(S)$ definida por

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\partial = \partial(A, A^*)$ é a aplicação bordo definida pelo fluxo. A aplicação Δ é chamada de **matriz de conexão para a decomposição em par atrator-repulsor** (A, A^*) de S .

Assim, a partir da matriz de conexão Δ de uma decomposição em par atrator-repulsor (A, A^*) , é possível construir a sequência do índice homológico associada ao par (A, A^*) , a menos de um isomorfismo de sequências exatas. Logo, a matriz Δ carrega todas as informações algébricas desta sequência.

Um dos principais interesses no estudo do índice de Conley e da matriz de conexão é entender como estes podem auxiliar na descrição dinâmica de um dado fluxo sobre um conjunto invariante isolado. Os resultados a seguir caminham nesta direção.

Proposição 4.3. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e (A, A^*) um par atrator-repulsor de S . Se*

- *a aplicação bordo $\partial(A^*, A)$ definida por φ é não nula*

ou se

- *$H(S)$ não é isomorfa a $H(A) \oplus H(A^*)$*

então $C(A, A^) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Fazendo a prova por contrapositiva, suponha que $C(A, A^*) = \emptyset$. Então S se decompõe como união disjunta do atrator A com seu repulsor complementar A^* . Segue diretamente da Propriedade de Aditividade 3.3 que $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$. Com isso, a sequência do índice homológico do par (A, A^*) se torna:

$$\cdots \longrightarrow H_*(A) \xrightarrow{i(A, S)} H_*(H(A) \oplus H(A^*)) \xrightarrow{p(S, A^*)} H_*(A^*) \xrightarrow{\partial(A^*, A)} H_*(A) \longrightarrow \cdots$$

Sendo esta sequência exata, $\ker \partial = \text{im } p = H(A^*)$, ou seja, $\partial = 0$. □

Corolário 4.1. *Se $C(A, A^*) = \emptyset$, ou seja, se $S = A \sqcup A^*$ então $\partial = 0$.*

Corolário 4.2. *Seja S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e seja (A, A^*) um par atrator-repulsor de S . Se $\text{Con}_*(S) = 0$ e se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Con}_k(A)$ e $\text{Con}_k(A^*)$ não se anulam concomitantemente então $C(A, A^*) \neq \emptyset$.*

As provas destes dois corolários seguem diretamente da Proposição 4.3.

A partir do Corolário 4.2, conclui-se que: dados um ponto de sela e um ponto atrator (ou um ponto repulsor), se estes pontos formam um par atrator-repulsor para um conjunto invariante isolado cujo índice de Conley é o trivial, então existe conexão entre estes pontos.

A Proposição 4.3 pode ser usada para obter informações sobre a existência de órbitas conectantes apenas quando $\partial \neq 0$ ou quando $H(S) \not\cong H(A) \oplus H(A^*)$. Porém existem casos em que $\partial = 0$ e $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$, como mostra a próxima proposição.

Proposição 4.4. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e (A, A^*) um par atrator-repulsor para S . Se existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\text{Con}_k(A) = \begin{cases} H_k(A), & \text{se } k = k_0 \\ 0, & \text{se } k \neq k_0 \end{cases} \quad \text{Con}_k(A^*) = \begin{cases} H_k(A^*), & \text{se } k = k_0 \\ 0, & \text{se } k \neq k_0 \end{cases}$$

então $\partial = 0$ e $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^)$.*

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, por hipótese $H_k(A^*) = 0$ ou $H_{k-1}(A) = 0$, em ambos os casos, a aplicação $\partial_k : H_k(A^*) \rightarrow H_{k-1}(A)$ é a aplicação nula. Portanto, $\partial = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo, $\partial = 0$.

Consequentemente, a aplicação $\Delta : H(A) \oplus H(A^*) \rightarrow H(A) \oplus H(A^*)$ é representada pela matriz nula, o que implica que

$$H_k(S) \approx H_k \Delta(S) = \frac{\ker \Delta_k}{\text{im } \Delta_{k+1}} \approx H_k(A) \oplus H_k(A^*),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $H(S) \approx H(A) \oplus H(A^*)$. □

Devido a este resultado, nota-se que a aplicação bordo ∂ e a matriz de conexão não conseguem detectar conexões entre singularidades que possuem o mesmo índice, como por exemplo conexões entre pontos de sela que possuem os mesmo índices.

4.2 Matriz de Conexão para uma Decomposição de Morse

Seja S um conjunto invariante isolado e $\mathcal{D}(S)$ uma decomposição de Morse \prec -ordenada.

Na Seção 3.2 foi afirmada a existência de uma filtração-índice para qualquer decomposição de Morse. Considere $\mathcal{N} = \{N_I\}_{I \in \mathcal{A}}$ uma filtração-índice para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ \prec -ordenada. Seja $J \in \mathcal{I}$, se (N_{K_1}, N_{I_1}) e (N_{K_2}, N_{I_2}) são pares-índice, definidos pela filtração \mathcal{N} , para o conjunto de Morse M_J então os respectivos espaços pontuados N_{K_1}/N_{I_1} e N_{K_2}/N_{I_2} são homeomorfos. Com efeito, $N_{K_1} \setminus N_{I_1} = N_{K_2} \setminus N_{I_2}$, pela Proposição 3.12. Considere a aplicação entre N_{K_1}/N_{I_1} e N_{K_2}/N_{I_2} induzida pela identidade sobre $N_{K_1} \setminus N_{I_1} = N_{K_2} \setminus N_{I_2}$, ou seja,

$$\begin{aligned} N_{K_1}/N_{I_1} &\longrightarrow N_{K_2}/N_{I_2} \\ [x] &\longmapsto [x] && \text{se } x \in N_{K_1} \setminus N_{I_1}, \\ [x] &\longmapsto [N_{I_2}] && \text{se } x \in N_{I_1}. \end{aligned}$$

Tal aplicação fornece o homeomorfismo afirmado.

Dado um módulo G arbitrário, denote por $C_*(N_{K_i}/N_{I_i}; G)$, com $i = 1, 2$, o conjunto formado pelas cadeias singulares com coeficientes em G do espaço pontuado N_{K_i}/N_{I_i} . Como os espaços pontuados N_{K_1}/N_{I_1} e N_{K_2}/N_{I_2} são homeomorfos, segue que os complexos de cadeia $C_*(N_{K_1}/N_{I_1}; G)$ e $C_*(N_{K_2}/N_{I_2}; G)$ são isomorfos. Assim, todos os pares-índice definidos pela filtração \mathcal{N} , que são associados ao conjunto de Morse M_J , induzem complexos de cadeia naturalmente isomorfos.

Para cada $J \in \mathcal{I}(\prec)$, denote por $C_{\mathcal{N}}(J; G)$, ou apenas por $C_{\mathcal{N}}(J)$, um complexo de cadeia isomorfo ao complexo $C_*(N_K, N_I)$, onde (N_K, N_I) é um par-índice para M_J definido pela filtração \mathcal{N} . Veja que a homologia do complexo $C_{\mathcal{N}}(J; G)$ é exatamente o índice homológico de Conley do conjunto de Morse M_J , denotada por $H(M_J; G)$ ou simplesmente por $H(M_J)$.

Pelo Corolário 3.1, se $(I, J) \in \mathcal{I}_2(\prec)$ então (M_I, M_J) é um par atrator-repulsor para M_{IJ} . Seja (N_0, N_1, N_2) um trio-índice definido pela filtração \mathcal{N} para (M_I, M_J) , então está bem definida a sequência

$$C_*(N_1/N_0) \xrightarrow{i} C_*(N_2/N_0) \xrightarrow{p} C_*(N_2/N_1).$$

Franzosa mostra em [7] que esta sequência é fracamente exata. Além disso, esta sequência

pode ser representada por

$$C_{\mathcal{N}}(I) \xrightarrow{i(I,IJ)} C_{\mathcal{N}}(IJ) \xrightarrow{p(IJ,J)} C_{\mathcal{N}}(J), \quad (4.8)$$

pela convenção adotada longo acima.

Sendo (4.8) fracamente exata esta induz, pela Proposição 4.1, a sequência longa exata

$$\cdots \longrightarrow H_*(M_I) \xrightarrow{i_*(I,IJ)} H_*(M_{IJ}) \xrightarrow{p_*(IJ,J)} H_*(M_J) \xrightarrow{\partial(J,I)} H_*(M_I) \longrightarrow \cdots. \quad (4.9)$$

Veja que esta sequência é exatamente a sequência do índice homológico do par atrator-repulsor (M_I, M_J) definida em (4.4).

A partir da sequência 4.8 é possível construir uma trança de complexos de cadeia $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\prec)$ formada pelos complexos $C_{\mathcal{N}}(I)$, com $I \in \mathcal{I}$, juntamente com as aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$, onde $(I, J) \in \mathcal{I}_2$; é o que garante o próximo resultado, cuja demonstração encontra-se na referência [7].

Proposição 4.5. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ , $\mathcal{D}(S)$ uma decomposição de Morse para S e \mathcal{N} uma filtração-índice associada a $\mathcal{D}(S)$. A coleção $\mathcal{C}(\mathcal{N}; G)$ consistindo dos complexos de cadeias $C_{\mathcal{N}}(I)$, para todo $I \in \mathcal{I}$, e das aplicações $i(I, IJ)$ e $j(IJ, J)$, com $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, é uma trança de complexos de cadeia da filtração-índice com coeficientes em G .*

Essa trança também é denotada por $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$.

Como foi visto no início deste capítulo, passando a trança de complexos de cadeia $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ para homologia obtém-se uma trança de módulos graduados $\mathcal{H}\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\prec; G)$ gerada por $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$. Esta trança independe da filtração \mathcal{N} .

Os módulos graduados que constituem a trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\prec; G)$, por definição de trança gerada, são as homologias dos complexos de cadeia $C_{\mathcal{N}}(I)$ que formam $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$. E para cada $I \in \mathcal{I}$, como foi argumentado antes, a homologia do complexo $C_{\mathcal{N}}(I)$ coincide com o índice homológico de Conley do conjunto de Morse M_I . Assim, a trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\prec; G)$ é formada pelos índices homológicos de Conley $H(M_I)$, para todo $I \in \mathcal{I}$ e pelas aplicações definidas em (4.9), a saber:

$$\begin{aligned} i(I, IJ) : G(I) &\longrightarrow G(IJ) && \text{de grau } 0, \\ p(IJ, J) : G(IJ) &\longrightarrow G(J) && \text{de grau } 0, \\ \partial(J, I) : G(J) &\longrightarrow G(I) && \text{de grau } -1. \end{aligned}$$

Definição 4.8. A trança de módulos graduados $\mathcal{HC}_N(\prec; G)$ é chamada de **trança do índice homológico de Conley** segundo a ordem \prec .

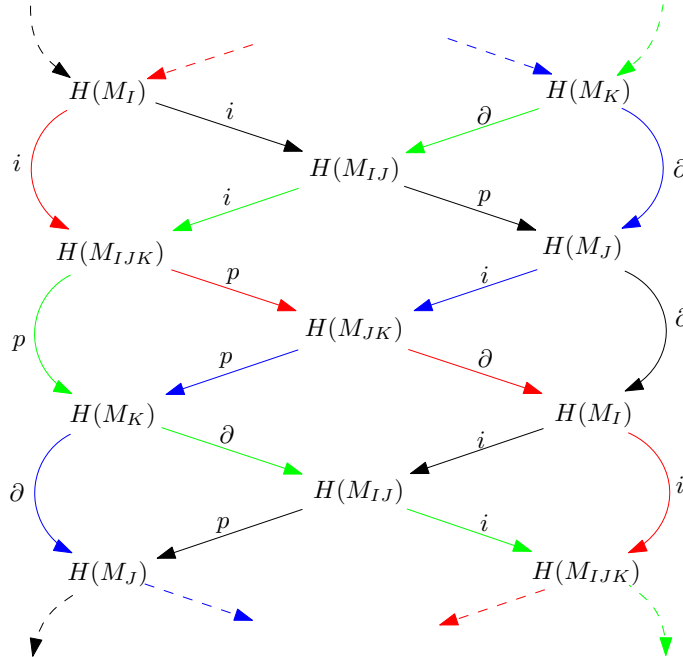
Para cada par atrator-repulsor (M_I, M_J) , onde $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, a trança $\mathcal{HC}_N(\prec; G)$ associa, pela Definição 4.3, a sequência

$$\cdots \longrightarrow H(M_I) \xrightarrow{i} H(M_{IJ}) \xrightarrow{p} H(M_J) \xrightarrow{\partial} H(M_I) \longrightarrow \cdots ,$$

que, de fato, é a sequência do índice homológico associada ao par atrator-repulsor (M_I, M_J) . Assim, dada uma tripla de intervalos adjacentes $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$, a trança $\mathcal{HC}_N(\prec; G)$ fornece as sequências do índice homológico para cada combinação de intervalos adjacentes (I, J) , (I, JK) , (IJ, K) e (J, K) formados a partir da tripla (I, J, K) :

$$\begin{aligned} & \cdots \longrightarrow H(M_I) \xrightarrow{i} H(M_{IJ}) \xrightarrow{p} H(M_J) \xrightarrow{\partial} H(M_I) \longrightarrow \cdots , \\ & \cdots \xrightarrow{\text{red}} H(M_I) \xrightarrow{\text{red } i} H(M_{IJK}) \xrightarrow{\text{red } p} H(M_{JK}) \xrightarrow{\text{red } \partial} H(M_I) \xrightarrow{\text{red}} \cdots , \\ & \cdots \xrightarrow{\text{green}} H(M_{IJ}) \xrightarrow{\text{green } i} H(M_{IJK}) \xrightarrow{\text{green } p} H(M_K) \xrightarrow{\text{green } \partial} H(M_{IJ}) \xrightarrow{\text{green}} \cdots , \\ & \cdots \xrightarrow{\text{blue}} H(M_J) \xrightarrow{\text{blue } i} H(M_{JK}) \xrightarrow{\text{blue } p} H(M_K) \xrightarrow{\text{blue } \partial} H(M_J) \xrightarrow{\text{blue}} \cdots \end{aligned}$$

e as relacionam através do seguinte diagrama comutativo em forma de trança :



Observe que se a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ for formada apenas por um par atrator-repulsor (A, A^*) então a trança acima se reduz à sequência do índice homológico do par

atrator-repulsor (A, A^*) . E nesse sentido, a trança do índice homológico generaliza a sequência do índice homológico.

Veja que a trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(\prec; G)$ depende da escolha da ordem admissível em $\mathcal{D}(S)$. E como toda ordem admissível de $\mathcal{D}(M)$ é uma extensão da ordem do fluxo, segue que a trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(<_f; G)$ contém a trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(\prec; G)$ para cada ordem admissível; portanto

Definição 4.9. A trança $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(<_f; G)$ do índice homológico para a ordem do fluxo é chamada também de **trança do índice homológico para a decomposição de Morse** e é denotada por $\mathcal{H}(\mathcal{D}(S); G)$ ou $\mathcal{H}(\mathcal{D}(S))$.

Agora, para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$, considere o módulo graduado

$$C\Delta(I) := \bigoplus_{\pi \in I} H(M_\pi).$$

Uma aplicação $\Delta(J, I) : C\Delta(J) \rightarrow C\Delta(I)$ pode ser vista como uma matriz de aplicações

$$\Delta(J, I) := \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \Delta(\pi', \pi) & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right)_{\pi \in I, \pi' \in J},$$

tal que cada $\Delta(\pi', \pi)$ é uma aplicação de $H(M_{\pi'})$ para $H(M_\pi)$ localiza na π -ésima linha e π' -ésima coluna da matriz $\Delta(J, I)$. Note que $\Delta(J, I)$ é uma matriz de ordem $|I| \times |J| < \infty$, onde $|I|$ e $|J|$ denotam as cardinalidades dos conjuntos I e J , respectivamente; estes conjuntos são finitos pois $I, J \subset P$, e P é finito.

A aplicação $\Delta(I, I)$ será denotada apenas por $\Delta(I)$, e no caso em que $I = P$, a aplicação $\Delta(P)$ será denotada simplesmente por Δ .

Definição 4.10. Considere a aplicação $\Delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$.

1. $\Delta(I)$ é **triangular superior** se $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ implica $\pi \prec \pi'$ ou $\pi = \pi'$, para todo $\pi, \pi' \in I$;
2. $\Delta(I)$ é **triangular estritamente superior** se $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ implica $\pi \prec \pi'$, para todo $\pi, \pi' \in I$;
3. $\Delta(I)$ é uma **aplicação bordo** se, para todo $\pi, \pi' \in I$, $\Delta(\pi', \pi)$ possui grau -1 e $\Delta(I) \circ \Delta(I) = 0$.

Proposição 4.6. *Seja $\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P)$ uma aplicação bordo triangular estritamente superior. Para cada intervalo I , a aplicação $\Delta(I) : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ é uma aplicação bordo triangular estritamente superior.*

Demonstração: É imediato que $\Delta(I)$ é triangular estritamente superior e que $\Delta(\pi', \pi)$ é de grau -1 , para todo $\pi, \pi' \in I$. Falta apenas ver que $\Delta(I)^2 = 0$. Com efeito, sejam $J, K \in \mathcal{I}$ tais que (K, I, J) é decomposição de P , ou seja, $I \sqcup J \sqcup K = P$ e $(K, I, J) \in \mathcal{I}_3$. A aplicação Δ pode ser visualizada da seguinte maneira:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(K) & \Delta(I, K) & \Delta(J, K) \\ \Delta(K, I) & \Delta(I) & \Delta(J, I) \\ \Delta(K, J) & \Delta(I, J) & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

Sendo Δ triangular estritamente superior, $\Delta(K, I) = \Delta(K, J) = \Delta(I, J) = 0$, portanto,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta(K) & \Delta(I, K) & \Delta(J, K) \\ 0 & \Delta(I) & \Delta(J, I) \\ 0 & 0 & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

Por hipótese $\Delta^2 = 0$, logo a composição da segunda linha com a segunda coluna da matriz Δ é nula, ou seja, $\Delta(I)^2 = 0$. \square

Considere Δ uma aplicação bordo triangular superior, então $(C\Delta(P), \Delta)$ é um complexo de cadeia que possui como subcomplexo de cadeia $(C\Delta(I), \Delta(I))$, para cada $I \in \mathcal{I}$; além disso, $\Delta(I)$ é triangular superior.

Para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, está bem definida a seguinte sequência exata curta de complexos de cadeia

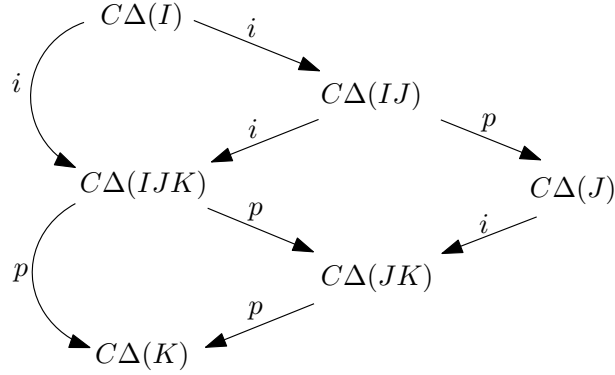
$$0 \longrightarrow C\Delta(I) \xrightarrow{i(I, IJ)} C\Delta(IJ) \xrightarrow{p(IJ, J)} C\Delta(J) \longrightarrow 0, \quad (4.10)$$

onde i e p são as aplicações óbvias de inclusão e projeção, respectivamente. De fato, i e p são aplicações de cadeia, como mostra o próximo resultado.

Proposição 4.7. *Sejam I, J, K intervalos em $(P, <)$.*

1. *As aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ definidas em (4.10) são aplicações de cadeia;*
2. *Se I e J são intervalos não comparáveis então $p(JI, J) \circ i(I, IJ) = \text{id}|_{C\Delta(I)}$;*

3. Se $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ então o diagrama de tranças abaixo comuta:



Demonstração:

1. Representando as aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ nas formas matriciais

$$i(I, IJ) := \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad p(IJ, J) := \begin{pmatrix} 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Como $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, a aplicação $\Delta(IJ)$ pode ser visualizada do seguinte modo:

$$\Delta(IJ) := \begin{pmatrix} \Delta(I) & \Delta(J, I) \\ 0 & \Delta(J) \end{pmatrix}.$$

Com essas identificações segue que:

$$\Delta(IJ) \circ i(I, IJ) = i(I, IJ) \circ \Delta(I) \quad \text{e} \quad \Delta(J) \circ p(IJ, J) = p(IJ, J) \circ \Delta(IJ).$$

Portanto, $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ são aplicações de cadeia.

2. Sendo I e J intervalos não comparáveis, então IJ e JI são intervalos. Logo, os complexos $(C\Delta(IJ), \Delta(IJ))$ e $(C\Delta(JI), \Delta(JI))$ estão bem definidos, de modo que

$$p(JI, I) \circ i(I, IJ) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} \end{pmatrix}.$$

3. O diagrama de tranças é comutativo se valem as igualdades:

- $i(IJ, IJK) \circ i(I, IJ) = i(I, IJK),$
- $p(JK, K) \circ p(IJK, JK) = p(IJK, K),$

$$\bullet \quad i(J, JK) \circ p(IJ, J) = p(IJK, JK) \circ i(IJ, IJK).$$

Seja $x = \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi \in C\Delta(I)$. Então

$$\begin{aligned} i(IJ, IJK) \circ i(I, IJ)(x) &= i(IJ, IJK) \left(\bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} 0 \right) \\ &= \bigoplus_{\pi \in I} x_\pi + \bigoplus_{\pi \in J} 0 + \bigoplus_{\pi \in K} 0 = i(I, IJK)(x). \end{aligned}$$

E daí, $i(IJ, IJK) \circ i(I, IJ) = i(I, IJK)$. As outras duas igualdades são provadas de forma similar. \square

Esta proposição implica que a coleção formada pelos complexos $(C\Delta(I), \Delta(I))$ juntamente com as aplicações $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$, anteriormente definidas, é uma trança de complexos de cadeia. O que prova o seguinte resultado:

Proposição 4.8. *Considere uma aplicação bordo triangular estritamente superior*

$$\Delta : C\Delta(P) \longrightarrow C\Delta(P),$$

onde $C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi)$. A coleção, denotada por $\mathcal{C}\Delta(\prec)$, consistindo dos complexos de cadeia $(C\Delta(I), \Delta(I))$, para cada $I \in \mathcal{I}$, e das aplicações de cadeia $i(I, IJ)$ e $p(IJ, J)$ definidas em (4.10), para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, é uma trança de complexos de cadeia.

A trança $\mathcal{C}\Delta(\prec)$ é chamada de **trança de complexos de cadeia definida por Δ** . Agora, seja $\mathcal{H}\Delta := \mathcal{H}\mathcal{C}\Delta(\prec)$ a **trança de módulos graduados gerada por $\mathcal{C}\Delta(\prec)$** . Essa trança é formada pela homologia do complexo $(C\Delta(I), \Delta(I))$ denotada por $H\Delta(I)$, para cada $I \in \mathcal{I}$, e pelas aplicações

$$\begin{aligned} \bar{i}_*(I, IJ) : H\Delta(I) &\longrightarrow H\Delta(IJ) && \text{de grau } 0, \\ \bar{p}_*(IJ, J) : H\Delta(IJ) &\longrightarrow H\Delta(J) && \text{de grau } 0, \\ \bar{\partial}(J, I) : H\Delta(J) &\longrightarrow H\Delta(I) && \text{de grau } -1, \end{aligned}$$

que são obtidas da sequência longa exata em homologia associada à sequência (4.10), para cada $(I, J) \in \mathcal{I}_2$.

Com isso, foram construídas nessa seção duas tranças de módulos graduados: a trança do índice homológico de Conley $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(\prec; G)$ dada pela Definição 4.8 e a trança $\mathcal{H}\Delta$ recém

construída. A matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(M)$ é definida a partir dessas duas tranças da seguinte forma:

Definição 4.11. *Sejam S um conjunto invariante isolado de um fluxo φ e $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ uma decomposição de Morse com ordem admissível \prec para S . Considere o módulo graduado*

$$C\Delta(P) = \bigoplus_{\pi \in P} H(M_\pi)$$

e a aplicação $\Delta : C\Delta(P) \longrightarrow C\Delta(P)$. A aplicação Δ é dita uma **matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ segundo a ordem admissível \prec** se

1. Δ é uma aplicação bordo triangular estritamente superior;
2. a trança de módulos graduados $\mathcal{H}\Delta$ é isomorfa à trança do índice homológico de Conley $\mathcal{H}\mathcal{C}_N(\prec; G)$, ou seja, existe uma coleção de isomorfismos $\{\phi(I) : H\Delta(I) \rightarrow H(M_I), I \in \mathcal{I}\}$ tal que para cada par $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H\Delta(I) & \xrightarrow{\bar{i}} & H\Delta(IJ) & \xrightarrow{\bar{p}} & H\Delta(J) \xrightarrow{\bar{\partial}} H\Delta(I) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \theta(I) & & \downarrow \theta(IJ) & & \downarrow \theta(J) \\ \cdots & \longrightarrow & H(M_I) & \xrightarrow{i} & H(M_{IJ}) & \xrightarrow{p} & H(M_J) \xrightarrow{\partial} H(M_I) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Para melhor compreensão da definição de matriz de conexão apresenta acima, segue um exemplo detalhado de matrizes de conexão para o conjunto invariante isolado visto no Exemplo 3.18.

No exemplo a seguir o módulo G será tomado como sendo o corpo \mathbb{Z}_2 .

Exemplo 4.1. Considere o conjunto parcialmente ordenado $(P, <)$, onde $P = \{1, 2, 3\}$ e $1 < 2 < 3$. Veja que o conjunto de intervalos de $(P, <)$ é

$$\mathcal{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Os pares adjacentes de intervalos são:

$$\mathcal{I}_2 = \{(\{1\}, \{2\}), (\{2\}, \{3\}), (\{1\}, \{2, 3\}), (\{1, 2\}, \{3\})\}.$$

O conjunto das triplas de intervalos adjacentes é:

$$\mathcal{I}_3 = \{(\{1\}, \{2\}, \{3\})\}.$$

Considere ainda o conjunto invariante isolado S dado na Figura 4.1. Veja que S é composto por três singularidades a , b e c juntamente com as órbitas conectantes $C(b, a)$ e $C(c, b)$. Definindo os conjuntos $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b\}$ e $M_3 = \{c\}$, tem-se que a coleção $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ é uma decomposição de Morse $<$ -ordenada para S . Além disso, a ordem admissível $<$ coincide com a ordem do fluxo.

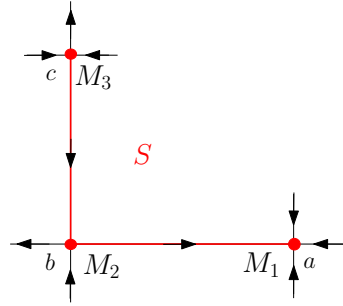


Figura 4.1: Decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S .

O primeiro objetivo deste exemplo é construir a trança do índice homológico de Conley segundo a ordem $<$ para S . Nesse sentido, considere a seguinte notação:

$$M_{123} = S, \quad M_{12} = M_1 \cup M_2 \cup C(M_1, M_2), \quad e \quad M_{23} = M_2 \cup M_3 \cup C(M_2, M_3).$$

Calculando o índice homotópico dos conjuntos de Morse M_I , com $I \in \mathcal{I}$, tem-se:

$$h(M_1) = \Sigma^0, \quad h(M_2) = h(M_3) = h(M_{123}) = \Sigma^1, \quad h(M_{12}) = \bar{0}, \quad h(M_{23}) = \Sigma^1 \vee \Sigma^1.$$

Logo, os respectivos índices homológicos (com coeficientes em \mathbb{Z}_2) são:

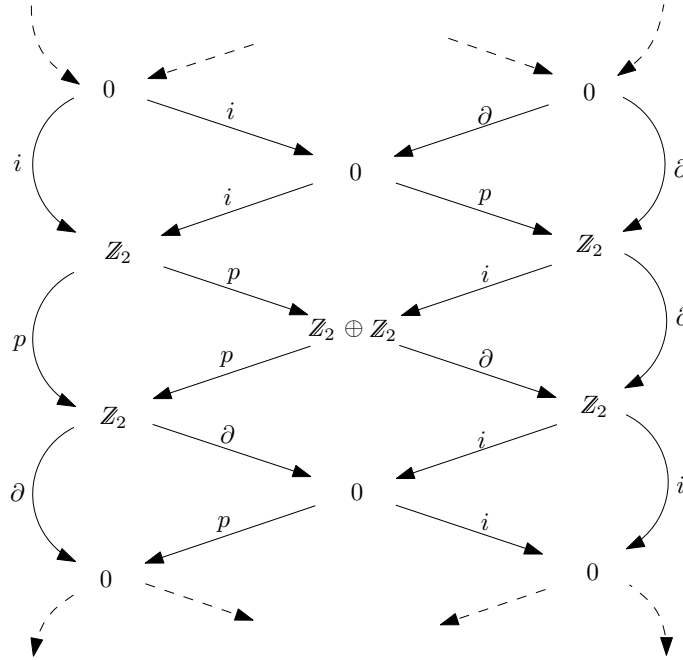
$$H(M_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases} \quad H(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$H(M_{12}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad H(M_{23}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$H(M_2) = H(M_3) = H(M_{123}).$$

Deste modo, a trança do índice homológico $\mathcal{HC}_N(<; \mathbb{Z}_2)$ é formada pelos módulos graduados acima, juntamente com as aplicações de inclusão $i(I, IJ)$, projeção $p(IJ, J)$ e bordo $\partial(J, I)$, para os pares adjacentes de intervalos (I, J) .

Como $(P, <)$ tem apenas uma tripla de intervalos adjacentes $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$, a trança do índice homológico é a trança:



Agora, para cada intervalo $I \in \mathcal{I}$, considere o módulo graduado $C\Delta(I) = \oplus H(M_\pi)$, onde π varia no intervalo I . Assim,

$$C\Delta(1) = H(M_1) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases} \quad C\Delta(2) = C\Delta(3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$C\Delta(12) = H(M_1) \oplus H(M_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0, 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$C\Delta(23) = H(M_2) \oplus H(M_3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$C\Delta(123) = H(M_1) \oplus H(M_2) \oplus H(M_3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0, 1 \end{cases}$$

Dada uma aplicação $\Delta : C\Delta(P) \rightarrow C\Delta(P)$ bordo triangular estritamente superior, pode-se visualizar Δ como uma matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(2,1) & \Delta(3,1) \\ 0 & 0 & \Delta(3,2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\Delta(2,1) : H(M_2) \rightarrow H(M_1)$, $\Delta(3,1) : H(M_3) \rightarrow H(M_1)$ e $\Delta(3,2) : H(M_3) \rightarrow H(M_2)$ são homomorfismos de grau -1 .

Ora, sendo $\Delta(3,2)$ uma aplicação de grau -1 , $\Delta(3,2)$ é a aplicação nula, pois as homologias $H(M_3)$ e $H(M_2)$ são não nulas apenas na dimensão 1. Portanto,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(2,1) & \Delta(3,1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\Delta(2,1) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 0 \end{cases}$$

então $\Delta(2,1)$ é a aplicação nula ou um isomorfismo, já que $\Delta(2,1)$ é um homomorfismo.

Analogamente, $\Delta(3,1)$ é a aplicação nula ou um isomorfismo.

Para que Δ seja uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$, a trança $\mathcal{H}\Delta$ gerada por Δ deve ser isomorfa à trança do índice homológico de Conley. A partir deste fato, obtém-se informações sobre as aplicações $\Delta(2,1)$ e $\Delta(3,1)$.

Para obter a trança de módulos graduados gerada por Δ , é necessário calcular as homologias dos complexos $(C\Delta(I), \Delta(I))$, para cada $I \in \mathcal{I}$, onde $\Delta(I)$ é a restrição de Δ ao intervalo I . Tem-se

$$H_n \Delta(1) = \frac{\ker \Delta_n(1)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(1)} = \frac{H_n(M_1)}{0} \approx H_n(M_1),$$

$$H_n \Delta(2) = \frac{\ker \Delta_n(2)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(2)} = \frac{H_n(M_2)}{0} \approx H_n(M_2),$$

$$H_n \Delta(3) = \frac{\ker \Delta_n(3)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(3)} = \frac{H_n(M_3)}{0} \approx H_n(M_3),$$

$$H_n \Delta(12) = \frac{\ker \Delta_n(2, 1)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(2, 1)} = \frac{H_n(M_1) \oplus \ker \Delta_n(2, 1)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(2, 1) \oplus 0},$$

$$H_n \Delta(23) = \frac{\ker \Delta_n(3, 2)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(3, 2)} = \frac{H_n(M_2) \oplus H_n(M_3)}{0} \approx H_n(M_2) \oplus H_n(M_3).$$

Veja que a homologia do complexo $(C\Delta(I), \Delta(I))$ é isomorfa ao índice homológico de Conley do conjunto M_I , para todo I intervalo, exceto quando $I = \{1, 3\}$. Para que Δ seja uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$, é necessário que $H\Delta(12) \approx H(M_{12})$. Foi visto que $\Delta(2, 1)$ ou é a aplicação nula ou um isomorfismo, sendo

$$H_n \Delta(12) = \frac{H_n(M_1) \oplus \ker \Delta_n(2, 1)}{\operatorname{im} \Delta_{n+1}(2, 1) \oplus 0},$$

se $\Delta(2, 1) = 0$ então $H\Delta(12) \approx H(M_1) \oplus H(M_2) \not\approx H(M_{12})$. Agora, se $\Delta(2, 1)$ é um isomorfismo então $H\Delta(12) \approx H(M_{12})$.

Observe que não foi necessária nenhuma restrição em $\Delta(3, 1)$ para que Δ seja uma matriz de conexão para $\mathcal{D}(S)$. Logo, as aplicações

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \approx & \approx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & \approx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são matrizes de conexão para a decomposição de Morse em questão. Δ

Denote por $\mathcal{CM}(\prec; G)$ o conjunto das matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$ segundo a ordem \prec , com coeficientes em G . Se a ordem considerada é a ordem do fluxo, o conjunto de tais matrizes é denotado por $\mathcal{CM}(\mathcal{D}(S); G)$ e se $\Delta \in \mathcal{CM}(\mathcal{D}(S); G)$, Δ é chamada de uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$, com coeficientes em G .

Se \prec_* é uma extensão de \prec , como $\mathcal{I}(\prec_*) \subset \mathcal{I}(\prec)$, então $\mathcal{H}\mathcal{C}\Delta(\prec_*) \subset \mathcal{H}\mathcal{C}\Delta(\prec)$. Assim,

existem mais restrições algébricas na definição de Δ para que $\mathcal{HC}_N(\prec)$ seja isomorfa a $\mathcal{HC}\Delta(\prec)$ do que na definição de Δ para que $\mathcal{HC}_N(\prec_*)$ seja isomorfa a $\mathcal{HC}\Delta(\prec_*)$. Como toda ordem admissível em $\mathcal{D}(M)$ é uma extensão da ordem do fluxo, então:

Proposição 4.9. *Seja \prec uma ordem admissível para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$. Então $\mathcal{CM}(\mathcal{D}(S); G) \subset \mathcal{CM}(\prec; G)$.*

Esta proposição reflete o fato de que as matrizes de conexão segundo a ordem do fluxo para uma decomposição de Morse são definidas usando o máximo (sobre todas as ordens admissíveis para a decomposição de Morse) de informações algébricas.

Como visto para matriz de conexão para um par atrator-repulsor, a matriz de conexão para uma decomposição de Morse codifica algumas informações sobre a estrutura do conjunto invariante isolado S . A proposição abaixo descreve uma situação onde informações sobre o conjunto de órbitas conectantes entre conjuntos de Morse podem ser obtidos via matrizes de conexão para decomposição de Morse.

Proposição 4.10. *Seja $\Delta \in \mathcal{CM}(\mathcal{D}(S); G)$. Dados dois elementos π, π' adjacentes na ordem do fluxo $<_f$ com $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ então $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Como Δ é uma matriz triangular estritamente superior, sendo $\Delta(\pi', \pi) \neq 0$ então $\pi <_f \pi'$. Pela definição da ordem do fluxo, existe uma sequência de elementos distintos $\pi_0 = \pi, \pi_1, \dots, \pi_n = \pi'$ em P de modo que $C(M_{\pi_{i-1}}, M_{\pi_i}) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como π e π' são adjacentes então $n = 1$ e $C(M_\pi, M_{\pi'}) \neq \emptyset$. \square

Franzosa mostra em [8] que, dada uma decomposição de Morse $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$ com ordem admissível \prec , se $H_k(M_\pi)$ é livre para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para todo $\pi \in P$, então existe pelo menos uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$. Deste modo, se os coeficientes são tomados sobre um corpo então existe matriz de conexão para qualquer decomposição de Morse. (Veja [16].)

Uma das propriedades mais importantes de matriz de conexão é a relacionada à continuação. Para especificar esta propriedade será exposto alguns fatos da teoria de continuação. (Para mais detalhes veja [9].) Considere uma família de fluxos parametrizados pelo intervalo $[0, 1]$. Assuma que, para $\lambda \in [0, 1]$, tem-se um conjunto invariante isolado S^λ e uma decomposição de Morse $\{M_\pi^\lambda : \pi \in (P, \prec_\lambda)\}$ de S^λ , onde \prec_λ denota a ordem parcial definida pelo fluxo em relação ao parâmetro λ . Assuma ainda que S^λ e M_π^λ são relaciona-

dos por continuação, recorde a Definição 3.7. (Aqui não se assume que a ordem do fluxo permanece constante quando se varia λ .)

Para cada intervalo I em P e $\lambda \in [0, 1]$, defina $H_\lambda = H_*(h(M^\lambda(I)))$. Se \prec_0 é uma ordem admissível para valores entre 0 e λ , então existe um isomorfismo definido pelo fluxo

$$\theta(I)^{-1} : H_0(I) \longrightarrow H_\lambda(I),$$

para cada intervalo I . Dada uma matriz de conexão para o fluxo no parâmetro λ , obtém-se uma matriz de conexão para o fluxo no parâmetro 0 via

$$\Delta_0(\pi, \pi') = \theta(\pi')^{-1} \Delta_\lambda(\pi, \pi') \theta(\pi).$$

O que dá origem a uma aplicação $\Theta : \mathcal{CM}_\lambda(\prec_\lambda) \rightarrow \mathcal{CM}_0(\prec_0)$. Esta aplicação é injetiva se \prec_0 permanece uma ordem admissível quando se varia o parâmetro de 0 a λ , o que é sempre verdade se λ é suficientemente pequeno.

Proposição 4.11. *Se \prec_0 permanece uma ordem admissível quando o parâmetro varia entre 0 e λ , então $\Theta : \mathcal{CM}_\lambda(\prec_\lambda) \rightarrow \mathcal{CM}_0(\prec_0)$ é injetiva, ou seja, $\mathcal{CM}_\lambda(\prec_\lambda) \subset \mathcal{CM}_0(\prec_0)$.*

Alguns resultados interessantes sobre matriz de conexão são obtidos quando se considera fluxos Morse-Smale sobre uma variedade M . Assuma que $\{M_\pi : \pi \in P\}$ é uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S contido em M , e que cada conjunto $\mathcal{D}(M_\pi)$ é uma singularidade hiperbólica. Como cada conjunto de Morse é uma singularidade hiperbólica, o índice de Conley de cada conjunto é o tipo de homotopia de uma esfera pontuada Σ^k , onde k é a dimensão da variedade instável de M_π . Tem-se o seguinte resultado demonstrado por Reineck em [16]:

Proposição 4.12. *Suponha que $W^s(M_\pi)$ e $W^s(M_{\pi'})$ se intersectam transversalmente para todo $\pi, \pi' \in P$. Considerando a homologia com coeficientes em um corpo \mathbb{F} , a matriz de conexão Δ segundo a ordem parcial determinada pelo fluxo é única.*

Demonstração: Sejam $\pi, \pi' \in P$ tais que $\pi' <_f \pi$. Existem dois casos a considerar:

Primeiramente, suponha que π e π' são adjacentes em P , então a aplicação $\Delta(\pi, \pi')$ é definida pela sequência:

$$\cdots \longrightarrow H_k(h(M_\pi \cup C(M_\pi, M_{\pi'}) \cup M_{\pi'})) \longrightarrow H_k(h(M_\pi)) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(h(M_{\pi'})) \longrightarrow \cdots$$

e, portanto, é única (ou é a aplicação nula ou um isomorfismo).

Agora se π e π' não são adjacentes, então $\Delta(\pi, \pi') = 0$. De fato, como π e π' não são adjacentes, existe $\pi'' \in P$, com $\pi' <_f \pi'' <_f \pi$. Sejam i, j e k tais que $h(M_{\pi'}) = \Sigma^i$, $h(M_{\pi''}) = \Sigma^j$ e $h(M_\pi) = \Sigma^k$. Sendo $\pi' <_f \pi''$ e $W^s(M_{\pi'})$ e $W^s(M_{\pi''})$ se intersectam transversalmente, então $i < j$, ou seja, $i \leq j - 1$. Analogamente, $j \leq k - 1$, daí $i \leq k - 2$. A aplicação $\Delta(\pi, \pi')$ é uma aplicação de grau -1 de $H_*(\Sigma^k; \mathbb{F})$ em $H_*(\Sigma^i; \mathbb{F})$, onde $i \leq k - 2$. A única aplicação possível é $\Delta(\pi, \pi') = 0$.

Assim, cada aplicação em Δ é nula ou é definida unicamente pelo fluxo. \square

O exemplo a seguir mostra que a hipótese de transversalidade é necessária na Proposição 4.12.

Exemplo 4.2. Considere o fluxo na Figura 4.2, onde o conjunto S , que consiste dos três pontos de equilíbrio a , b e c mais as órbitas conectantes, é um conjunto invariante isolado.

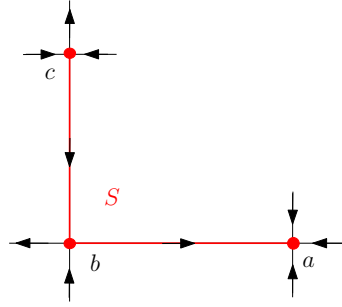


Figura 4.2: Conjunto invariante isolado.

Defina os conjuntos $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b\}$ e $M_3 = \{c\}$. Veja que $\mathcal{D}(S) = \{M_\pi\}_{\pi \in P}$, onde $P = \{1, 2, 3\}$, é uma decomposição de Morse para S , com ordem admissível $<$ dada por $1 < 2 < 3$. Observe ainda que $<$ é a ordem definida pelo fluxo.

O objetivo deste exemplo é encontrar as matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(S)$. Nesse sentido, como 1 e 2 são elementos adjacentes na ordem $<$, então a aplicação $\Delta(2, 1)$ é definida pelo fluxo. Analogamente, 2 e 3 são elementos adjacentes, logo $\Delta(3, 2)$ é definida pelo fluxo, o que não ocorre com a aplicação $\Delta(3, 1)$.

Para encontrar as aplicações $\Delta(2, 1)$ e $\Delta(3, 1)$, será necessário calcular os índices de Conley dos conjuntos de Morse M_1 , M_2 , M_3 e M_{12} , onde $M_{12} = M_1 \cup M_2 \cup C(a, b)$. Sendo M_1 um ponto atrator, M_2 um ponto de sela e M_3 um ponto de sela, tem-se $h(M_1) = \Sigma^0$, $h(M_2) = h(M_3) = \Sigma^1$.

Para calcular $h(M_{12})$, considere o par-índice (N, L) para M_{12} dado na Figura 4.3, logo o espaço pontuado N/L tem o tipo de homotopia de um ponto, portanto, $h(M_{12}) = \bar{0}$. Consequentemente, o índice homológico de M_{12} é o trivial, ou seja, $H(M_{12}) = 0$.

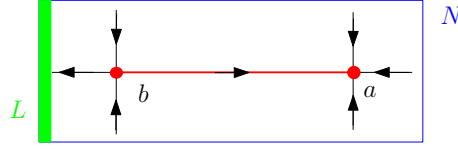


Figura 4.3: Par-índice para o conjunto de Morse M_{12} .

Usando este fato na sequência:

$$\cdots \longrightarrow H_k(M_{12}) \longrightarrow H_k(M_2) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(M_1) \longrightarrow \cdots ,$$

obtém-se que a aplicação $\Delta(2, 1)$ é um isomorfismo, pela Proposição 1.2. Veja ainda que as homologias $H(M_2)$ e $H(M_1)$ são não nulas apenas na dimensão 1, donde $\Delta(3, 2)$ é nula. Até aqui, a aplicação Δ tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \\ a \begin{bmatrix} 0 & \approx & ? \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b \\ c \end{array}$$

Será usada a Proposição 4.9 para mostrar que $\Delta(c, a)$ pode ser a aplicação nula ou um isomorfismo.

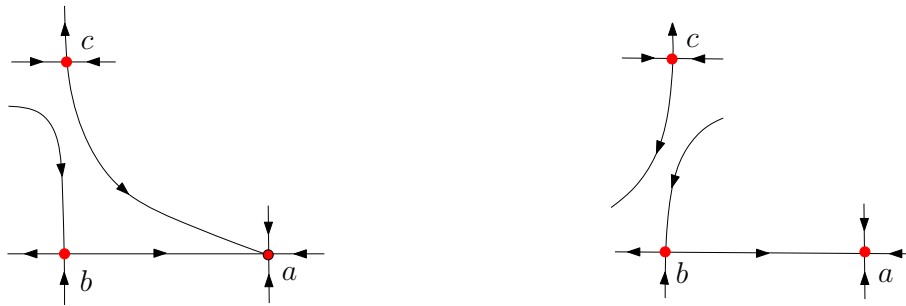


Figura 4.4: Perturbações do fluxo em 4.2

Nesse sentido, considere a Figura 4.4 à esquerda, que mostra um fluxo que pode ser realizado por meio de uma pequena e arbitrária perturbação do fluxo na Figura 4.2. Neste caso, a ordem parcial definida pelo fluxo é $1 < 2$ e $1 < 3$. A aplicação $\Delta(3, 1)$ agora é definida

pelo fluxo. Seja $M_{13} = M_1 \cup C(1, 3) \cup M_3$. É fácil ver que $h(M_{13}) = \bar{0}$, daí $H(M_{13}) = \bar{0}$. Analogamente ao caso anterior, $\Delta(3, 1)$ é um isomorfismo.

Por outro lado, se a perturbação no fluxo da Figura 4.2 for feita de modo que se obtenha o fluxo na Figura 4.4 à direita, então $\Delta(3, 1) = 0$, já que $1 \not\prec 3$.

Como cada uma destas matrizes de conexão podem se realizadas por meio de uma pequena e arbitrária perturbação do fluxo na Figura 4.2, a Proposição 4.9 implica que ambas matrizes são matrizes de conexão para o fluxo inicial.

Assim, foram obtidas as seguintes matrizes de conexão para a decomposição de $\mathcal{D}(S)$ <-ordenada:

$$\begin{bmatrix} 0 & \approx & \approx \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \approx & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

△

O próximo resultado foi mostrado por McCord em [12]:

Proposição 4.13. *Considere a homologia sobre Z_2 e sejam A e A^* singularidades hiperbólicas com índice de Conley Σ^k e Σ^{k+1} , respectivamente. Suponha ainda que a variedade estável de A intersecta a variedade instável de A^* transversalmente. Então a aplicação ∂ definida pelo fluxo conta o número de órbitas conectantes de A^* para A módulo 2.*

Um resultado similar a este é obtido considerando coeficientes mais gerais, desde que se considere a soma com orientações. O próximo capítulo trata desse assunto, onde se define matriz de conexão via o complexo de Morse-Witten.

Capítulo 5

Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten

Como pode-se notar, até aqui duas linhas de estudo foram apresentadas de forma independente, a saber: homologia de Morse e teoria de Conley.

A homologia de Morse, abordada no segundo capítulo deste trabalho, tem como ferramenta fundamental o complexo de Morse-Witten. Tal complexo está bem definido para qualquer variedade Riemanniana M suave e fechada de dimensão finita com um fluxo gradiente negativo. Como resultado principal deste estudo foi afirmado que a homologia de Morse coincide com a homologia singular da variedade M .

Já os capítulos posteriores trataram da teoria de Conley, foi seguida uma linha de estudo que permitiu introduzir a ferramenta conhecida como matriz de conexão. A matriz de conexão está bem definida para qualquer decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado sob um fluxo contínuo.

Este capítulo tem como finalidade relacionar estes dois estudos paralelos que foram feitos até aqui.

Como foi visto no capítulo anterior, apenas a definição de matriz de conexão já é complexa, e encontrar a matriz de conexão para um conjunto invariante isolado pode ser extremamente complicado. Seria interessante obter uma forma mais prática de obter tais matrizes. Para o caso de fluxos de Morse-Smale sobre uma variedade Riemanniana M suave e fechada de dimensão finita é possível obter uma matriz de conexão para M , de forma alternativa, utilizando-se o complexo de Morse-Witten, que está bem definido para M . Desta maneira, obtém-se uma relação entre os dois grandes temas abordados até então nesta dissertação.

Na Seção 5.1 é apresentada a prova de que a diferencial do complexo de Morse-Witten é uma matriz de conexão. Como corolário seguirá de forma simples a prova do Teorema da Homologia de Morse. Na Seção 5.2, define-se uma matriz para M via o complexo de Morse-Witten sem usar ferramentas da teoria de Conley, trata-se da matriz fornecida pela aplicação bordo de Morse-Witten que é uma matriz de conexão.

Como as ferramentas para a construção do complexo de Morse-Witten foram desenvolvidas logo no início deste trabalho, vale a pena fazer uma breve revisão sobre tal teoria.

Revisão - Complexo de Morse-Witten

Fixe uma variedade Riemanniana (M, g) suave e fechada de dimensão n e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse. Considere o campo vetorial gradiente ∇f sobre M . O fluxo associado ao campo gradiente negativo $-\nabla f$ é chamado de fluxo gradiente negativo.

Foi visto que

- f decresce ao longo de órbitas não singulares;
- órbitas fechadas não podem existir;
- qualquer órbita regular intersecta o conjunto de nível $f^{-1}(f(q))$ no máximo uma vez;
- $\omega^*(q)$ e $\omega(q)$ consistem cada um de apenas um ponto crítico de f , para todo $q \in M$;

Fixados $x, y \in \text{Crit}(f)$, a variedade conectante entre x e y é

$$\mathcal{M}_{xy} := W^u(x) \cap W^s(y).$$

Seja a um valor regular entre $f(x)$ e $f(y)$. O espaço moduli entre x e y é definido por:

$$\widehat{\mathcal{M}}_{xy} := \mathcal{M}_{xy} \cap f^{-1}(a).$$

Diz-se que o campo vetorial gradiente $\nabla^g f$ satisfaz a condição de Morse-Smale se as variedades instáveis $W^u(x)$ e $W^s(y)$ se intersectam transversalmente para todos os pontos $x, y \in \text{Crit}(f)$. Neste caso, (g, f) é dito um par Morse-Smale, f é dita ser uma função Morse-Smale e o fluxo associado ao campo $-\nabla f$ é dito fluxo Morse-Smale.

Se o fluxo gradiente negativo é de Morse-Smale, então os espaços \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ são sub-variedades de M sem fronteira e suas dimensões são dadas por:

$$\dim(\mathcal{M}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) \quad \text{e} \quad \dim(\widehat{\mathcal{M}}_{xy}) = \text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) - 1.$$

Fixe uma orientação arbitrária para $W^u(x)$, $\forall x \in \text{Crit}(f)$ e $\text{ind}_f(x) > 0$. Então, para todo $x, y \in \text{Crit}(f)$, \mathcal{M}_{xy} e $\widehat{\mathcal{M}}_{xy}$ herdam uma orientação induzida $[\mathcal{M}_{xy}]_{\text{ind}}$ e $[\widehat{\mathcal{M}}_{xy}]_{\text{ind}}$, respectivamente.

Assuma que $\text{ind}_f(x) - \text{ind}_f(y) = 1$ e seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. A órbita $\mathcal{O}(u)$ é uma componente conexa de \mathcal{M}_{xy} , logo tem orientação induzida $[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}}$. Denotando a orientação induzida em $\mathcal{O}(u)$ pelo fluxo tangente por $[\dot{u}]$, o sinal característico $n_u = n_u(\mathcal{O}r)$ da órbita através de u é definido por meio da igualdade

$$[\mathcal{O}(u)]_{\text{ind}} = n_u[\dot{u}].$$

A partir disto, o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é definido por

- $\mathcal{C}_k(f) = 0$, se $k < 0$;
- se $k \geq 0$, $\mathcal{C}_k(f) := \bigoplus \mathbb{Z}\langle x \rangle$, onde a soma percorre o conjunto $\text{Crit}_k(f)$;
- o operador bordo de Morse-Witten $\partial_k^c(x) : \mathcal{C}_k(f) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ é definido nos geradores x de $\mathcal{C}_k(f)$ por

$$\partial_k^c \langle x \rangle := \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle, \quad n(x, y) = \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} n_u,$$

e é estendido a toda cadeia por linearidade.

A homologia de Morse do complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é definida por

$$HM_k(M) := \frac{\ker \partial_k^c}{\text{im } \partial_{k+1}^c}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A homologia de Morse do complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é isomorfa à homologia singular da variedade M , ou seja,

$$H_k(M) \approx HM_k(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \frac{\ker \partial_k^c}{\text{im } \partial_{k+1}^c}.$$

Observação 5.1. *O complexo de Morse-Witten pode ser definido para coeficientes em qualquer grupo abeliano G , para isto, basta definir $\mathcal{C}_k(f, G) = G \otimes \mathcal{C}_k(f)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e*

$$\partial_k^c(G) = \mathbb{1}_G \otimes \partial_k^c : \mathcal{C}_k(f, G) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f, G).$$

5.1 Matriz de Conexão para Fluxos Morse-Smale

Nesta seção, o objetivo é mostrar que uma matriz de conexão para um fluxo de Morse-Smale pode ser obtida através do operador bordo de Morse-Witten. Como corolário deste fato seguirá a prova do Teorema da Homologia de Morse (Teorema 2.10). As referências básicas para esta seção são [1] e [19].

Antes de estabelecer esta relação entre matriz de conexão e o operador bordo do complexo de Morse-Witten, vale a pena frisar que um ponto crítico de uma função de Morse é de fato um conjunto invariante isolado, assim como o conjunto formado por dois pontos críticos e a órbita que os conecta. Os próximos exemplos tratam destas questões.

Exemplo 5.1 (Ponto crítico como conjunto invariante isolado). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em uma variedade Riemanniana suave (M, g) . Suponha que f satisfaz a condição de Morse-Smale, logo dado $x \in \text{Crit}_k(f)$, $W^s(x)$ e $W^u(x)$ se intersectam transversalmente no ponto x . Daí, existe uma carta coordenada $\phi : U \rightarrow T_x M$ em torno de x que leva $W^s(x) \cap U$ em $T_x W^s(x)$ e $W^u(x) \cap U$ em $T_x W^u(x)$ (ver [1], problema 9 do Capítulo 5). Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, defina

$$D_\epsilon^s = \{v \in T_x W^s(x) : \|v\| \leq \epsilon\}$$

$$D_\epsilon^u = \{v \in T_x W^u(x) : \|v\| \leq \epsilon\}.$$

Seja $N_x = \phi^{-1}(D_\epsilon^s \times D_\epsilon^u)$ e $L_x = \phi^{-1}(D_\epsilon^s \times \partial D_\epsilon^u)$. É fácil ver que N_x é uma vizinhança isolante para o conjunto compacto invariante $S = \{x\}$ e (N_x, L_x) é um par-índice para S .

Note que

$$(N_x, L_x) \approx (D_\epsilon^s \times D_\epsilon^u, D_\epsilon^s \times \partial D_\epsilon^u) \simeq (D_\epsilon^u, \partial D_\epsilon^u).$$

Logo $N_x/L_x \simeq D_\epsilon^u/\partial D_\epsilon^u$, e o tipo de homotopia do espaço $D_\epsilon^u/\partial D_\epsilon^u$ é a k -esfera pontuada, onde k é a dimensão da variedade instável de x . Até aqui foi obtido que o conjunto $S = \{x\}$

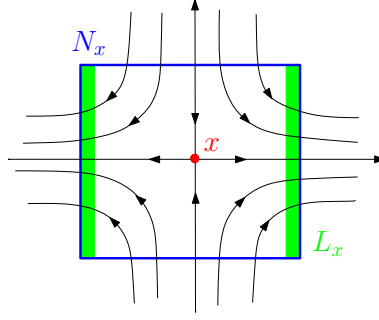


Figura 5.1: O par (N_x, L_x) é par-índice para o ponto de sela x .

é invariante isolado e o índice de Conley de S coincide com o tipo de homotopia da esfera k -dimensional. Além disso, veja que

$$\begin{aligned} H_j(N_x, L_x; \mathbb{Z}) &\approx H_j(D_\epsilon^u, \partial D_\epsilon^u; \mathbb{Z}) \\ &\approx H_j(D_\epsilon^u / \partial D_\epsilon^u, *, \mathbb{Z}) \\ &\approx H_j(N_x / L_x, *, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Observe ainda que $H_j(N_x, L_x; \mathbb{Z}) = H_j(D_\epsilon^u, \partial D_\epsilon^u; \mathbb{Z})$ é isomorfo a \mathbb{Z} , se $j = k$ e, caso contrário, é o grupo trivial.

Como uma orientação da variedade instável $W^u(x)$ de x determina um gerador do grupo de homologia $H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, obtém-se a seguinte identificação

$$\mathcal{C}_k(f) = \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} \mathbb{Z}\langle x \rangle \approx \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}).$$

△

Exemplo 5.2 (Linha do fluxo gradiente como conjunto invariante isolado). Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse-Smale em uma variedade Riemanniana compacta de dimensão finita (M, g) . Sejam $x \in \text{Crit}_k(f)$ e $y \in \text{Crit}_{k-1}(f)$ e considere o conjunto $S(x, y)$ formado pelas singularidades x e y juntamente com a variedade conectante \mathcal{M}_{xy} , ou seja, $S(x, y) := \mathcal{M}_{xy} \cup \{y, x\}$. O objetivo deste exemplo é mostrar que $S(x, y)$ é um conjunto invariante isolado e construir um trio-índice para o par atrator-repulsor (y, x) em $S(x, y)$.

Inicialmente, suponha que não existe conexão entre x e y , ou seja, que $\mathcal{M}_{xy} = \emptyset$. Então $S(x, y) = \{x\} \cup \{y\}$ é a união disjunta de dois conjuntos invariantes, logo é um conjunto invariante isolado. Sejam (A, \tilde{A}) e (B, \tilde{B}) pares-índice para $\{x\}$ e $\{y\}$, respectivamente.

Tome $N_2 = A \cup B$, $N_1 = \tilde{A} \cup B$ e $N_0 = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, deste modo (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para $S(x, y)$.

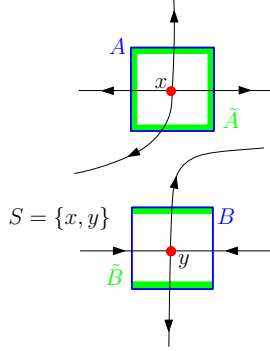


Figura 5.2: $(A \cup B, \tilde{A} \cup \tilde{B})$ é um par-índice para $S = \{x, y\}$.

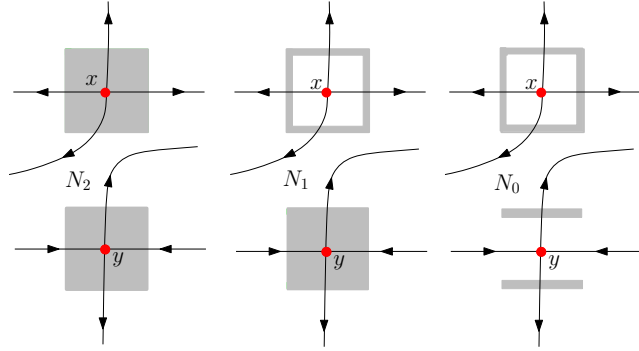


Figura 5.3: (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para o par atrator-repulsor (y, x) em S .

Já no caso que existe conexão entre as singularidades em questão, isto é, $\mathcal{M}_{xy} \neq \emptyset$, o Corolário 1.1 garante que $S(x, y) := \mathcal{M}_{xy} \cup \{y, x\}$ é um conjunto invariante isolado.

No Capítulo 2, foi visto que a função de Morse decresce ao longo de órbitas não singulares, logo $f(y) < f(x)$. Seja $c \in \mathbb{R}$ com $f(y) < c < f(x)$. O Teorema 3.1 garante a existência de um par-índice (N_2, N_0) para S . Tomando $N_1 = N_0 \cup (N_2 \cap M^c)$, onde $M^c = \{v \in M : f(v) \leq c\}$, tem-se que (N_2, N_1) é um par-índice para x e (N_1, N_0) é um par-índice para y .

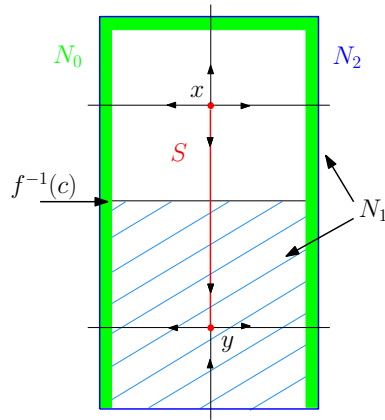


Figura 5.4: Par-índice para a conexão de singularidades S .

De fato, veja que (y, x) é um par atrator-repulsor em S e (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para esta decomposição de S em par atrator-repulsor.

Agora, sejam (N_x, L_x) e (N_y, L_y) pares-índice arbitrários para x e y , respectivamente, e

considere o homomorfismo

$$\Delta_k(x, y) : H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{k-1}(N_y, L_y; \mathbb{Z})$$

que é definido como a composição das seguintes aplicações:

$$H_k(N_x, L_x) \xrightarrow{\approx} H_k(N_2, N_1) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(N_1, N_0) \xrightarrow{\approx} H_{k-1}(N_y, L_y)$$

onde os isomorfismo são induzidos pela equivalência homotópica do Teorema 3.2 e δ_* é o homomorfismo de conexão que aparece na sequência longa exata em homologia da tripla (N_0, N_1, N_2) . Com isto determina-se o homomorfismo

$$\Delta_k : \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}) \longrightarrow \bigoplus_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} H_{k-1}(N_y, L_y; \mathbb{Z}). \quad (5.1)$$

Δ

O homomorfismo $\Delta = \{\Delta_k\}$ definido acima é um caso especial de matriz de conexão para fluxos Morse-Smale definidos em variedades Riemannianas suaves e compactas de dimensão finita. Como foi visto no Capítulo 4, uma matriz de conexão é definida a partir de uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado, com ordem admissível \prec . Seja M uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita n . Considere o conjunto parcialmente ordenado $(P = \text{Crit}_f, <)$, onde a ordem é definida pelo fluxo, considerando ainda a decomposição de Morse $\mathcal{D}(M) = \{M_x\}_{x \in P}$ de M , onde cada conjunto de Morse é formado por apenas uma singularidade $M_x = \{x\}$. Então a aplicação Δ definida em (5.1) é uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(M)$ segundo a ordem do fluxo.

A partir do homomorfismo (5.1), mostra-se que o operador bordo ∂_*^c do complexo de Morse-Witten coincide com a aplicação Δ e, portanto, ∂_*^c fornece uma matriz de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{D}(M) = \{M_x\}_{x \in P}$. Mais precisamente:

Teorema 5.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e suave de dimensão finita e f uma função de Morse sobre M . O operador bordo de Morse-Witten $\partial_*^c = \{\partial_k^c\}$ coincide com o homomorfismo $\Delta = \{\Delta_k\}$.*

Este teorema é o resultado mais importante desta dissertação. O principal objetivo deste trabalho é obter uma forma prática para calcular as matrizes de conexão. O Teorema 5.1 garante que, para fluxos Morse-Smale definidos em variedades Riemannianas suaves e

fechadas de dimensão finita, o operador bordo de Morse-Witten ∂_*^c é uma matriz de conexão. E, como foi visto na Seção 2.3, o operador ∂_*^c é descrito geometricamente e, de certo ponto de vista, mais acessível.

A prova do Teorema 5.1 apresentada aqui foi feita por Salamon em [19].

Demonstração: (Teorema 5.1)

A ideia da prova é mostrar que, dados (N_x, L_x) um par-índice para $x \in \text{Crit}_k(f)$ e (N_y, L_y) um par-índice para $y \in \text{Crit}_{k-1}(f)$, ∂_k^c o operador bordo de Morse-Witten, Δ_k o homomorfismo definido em (5.1) e δ_* o homomorfismo de conexão, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_k(f) & \xrightarrow{\partial_k^c} & \mathcal{C}_{k-1}(f) \\
 \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
 \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k(f)} H_k(N_x, L_x; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Delta_k} & \bigoplus_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} H_{k-1}(N_y, L_y; \mathbb{Z}) \\
 \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
 H_k(N_k, N_{k-1}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})
 \end{array}$$

onde (N_{k-2}, N_{k-1}, N_k) é um trio-índice para o par atrator-repulsor (y, x) em $S(x, y)$ (definido ao longo da demonstração). O segundo retângulo no diagrama acima comuta, já que o homomorfismo de conexão é uma aplicação natural e as aplicações verticais são isomorfismos induzidos pelo fluxo. E portanto, falta mostrar que o primeiro retângulo comuta.

Com o intuito de simplificar a notação, considere os conjuntos

$$M^c := \{v \in M : f(v) \leq c\} \quad \text{e} \quad M_c := \{v \in M : f(v) \geq c\}.$$

Fixe $x \in \text{Crit}_k(f)$, $y \in \text{Crit}_{k-1}(f)$ e seja $S(x, y) = \mathcal{M}_{xy} \cup \{x, y\}$. Alterando a função f fora de uma vizinhança isolante de $S(x, y)$, pode-se considerar, sem perda de generalidade, que x e y são os únicos pontos críticos em $f^{-1}(a, b)$, onde $f(y) = a$ e $f(x) = b$. O homomorfismo Δ_k e o operador de Morse-Witten não são afetados por esta alteração. Para detalhes sobre tal alteração veja [19].

Inicialmente, serão fixados alguns pares índices para os conjuntos $S(x, y) = \mathcal{M}_{xy} \cup \{x, y\}$, $\{x\}$ e $\{y\}$. Dados $c \in (a, b)$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $t_0 > 0$ suficientemente grande, defina os seguintes conjuntos:

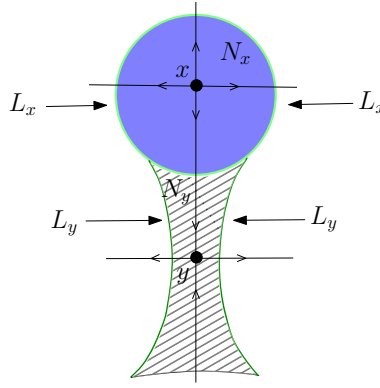
$$N_x = \{v \in M_c : f(\varphi_{-t_0}(v)) \leq b + \epsilon\},$$

$$L_x = \{v \in N_x : f(v) = c\},$$

$$N_y = \{v \in M^c : f(\varphi_{t_0}(v)) \geq a - \epsilon\},$$

$$L_y = \{v \in N_y : f(\varphi_{t_0}(v)) = a - \epsilon\},$$

$$N_2 = N_x \cup N_y, \quad N_1 = N_y \cup L_x, \quad N_0 = L_y \cup cl(L_x - N_y).$$



Desta forma (N_x, L_x) e (N_2, N_1) são pares-índice para x , (N_y, L_y) e (N_1, N_0) são pares-índice para y e (N_2, N_0) é um par-índice para $S(x, y)$. Assim, (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para o par atrator-repulsor (y, x) no conjunto invariante isolado $S(x, y)$. Veja Figura 5.5.

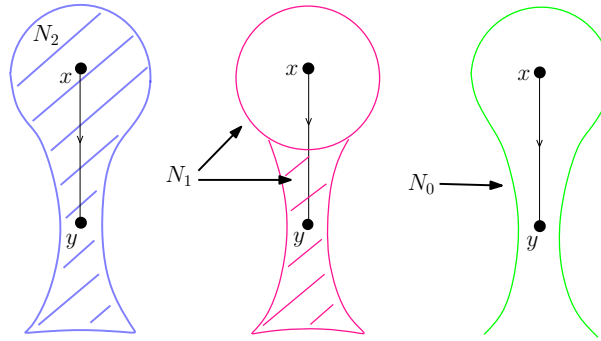


Figura 5.5: (N_0, N_1, N_2) é um trio-índice para o par atrator-repulsor (y, x) em $S(s, y)$.

Afirmção 5.1. *Veja que N_x é uma vizinhança tubular do disco instável fechado $W^u(x) \cap M_c$ k -dimensional com largura convergindo a zero quando $t_0 \rightarrow \infty$.*

De fato, note que o disco instável fechado $W^u(x) \cap M_c$ k -dimensional está contido em N_x já que, para todo $v \in W^u(x)$, tem-se que $\omega^*(v) = x$ e, como f decresce ao longo de órbitas regulares, $f(\varphi_{-t}(v)) \leq f(x) = b$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Fixado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto N_x é contraído para $W^u(x) \cap M_c$ quando $t_0 \rightarrow \infty$. Com efeito, $f(\varphi_{-t_0}(v)) \leq b + \epsilon$ para todo $v \in N_x$. Se $t_0 \rightarrow \infty$, então $f(\omega^*(v)) \leq b + \epsilon$ e como $\omega^*(v) \subset \text{Crit}(f)$, segue que $f(\omega^*(v)) = b$, portanto $v \in W^u(x)$. Desta maneira, (N_x, L_x) é contraído para

$$(W^u(x) \cap M_c, W^u(x) \cap f^{-1}(c)) \approx (D^k, \partial D^k). \quad \diamond$$

O isomorfismo acima garante que (N_x, L_x) é um par-índice regular, ou seja, que vale a igualdade $H(N_x, L_x) = H(N_x/L_x)$. Para mais detalhes veja [1].

Afirmção 5.2. *De forma análoga, N_y é uma vizinhança tubular do disco estável fechado $W^s(y) \cap M^c$ com largura convergindo a zero quando $t_0 \rightarrow \infty$.*

Ora, dado $v \in W^s(y) \cap M^c$ é claro que $\omega(v) = y$, portanto $f(\varphi_{t_0}(v)) \geq a > a - \epsilon$. Portanto, $W^s(y) \cap M^c \subset N_y$.

Fixado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto N_y é contraído para $W^s(y) \cap M^c$ quando $t_0 \rightarrow \infty$. Com efeito, $f(\varphi_{t_0}(v)) \geq a - \epsilon$ para todo $v \in N_y$. Se $t_0 \rightarrow \infty$, então $f(\omega(v)) \geq a - \epsilon$ e como $\omega(v) \subset \text{Crit}(f)$, segue que $f(\omega(v)) = a$, portanto $v \in W^s(y)$.

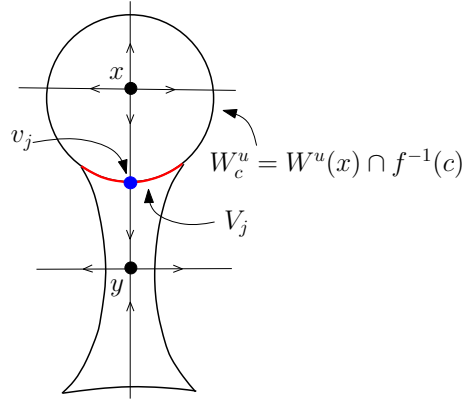
Sendo $W^s(y)$ é difeomorfo a um disco aberto de dimensão $n - k + 1$, tem-se

$$(N_y, L_y) \approx (D^{n-k+1} \times D^{k-1}, D^{n-k+1} \times \partial D^{k-1}). \quad \diamond$$

O isomorfismo acima garante que (N_y, L_y) é um par-índice regular, ou seja, que vale a igualdade $H(N_y, L_y) = H(N_y/L_y)$. Para mais detalhes veja [1].

Afirmção 5.3. *É possível obter variedades V_j de dimensão $k - 1$ difeomorfas ao disco fechado D^{k-1} , de modo que cada V_j contém um único ponto v_j de \mathcal{M}_{xy} .*

Foi visto que N_y é um espessamento do disco estável fechado $W^s(y) \cap M^c$ e lembre-se que $W_c^u(x) = W^u(x) \cap f^{-1}(c) \subset L_x$ é a esfera instável de x . Como $\mathcal{M}_{xy} = W^u(x) \cap W^s(y)$ tem uma quantidade finita de componentes conexas (Teorema 2.4), $N_y \cap W_c^u(x)$ consiste de uma quantidade finita de componentes conexas V_1, \dots, V_m , cada uma contendo um único ponto $v_j \in \mathcal{M}_{xy} \cap V_j$. De fato, a órbita de um ponto intersecta o conjunto de nível $f^{-1}(c)$ no máximo uma vez. Portanto, cada componente V_j contém apenas um ponto de \mathcal{M}_{xy} .



Como N_y é uma vizinhança tubular do disco estável fechado $W^s(y) \cap M^c \approx D^{n-k+1}$, existe um difeomorfismo

$$\Psi_y : N_y \longrightarrow D^{n-k+1} \times D^{k-1}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \Psi_y(L_y) &= D^{n-k+1} \times \partial D^{k-1} \\ \Psi_y(N_y \cap W^s(y)) &= D^{n-k+1} \times \{0\} \\ \Psi_y(V_j) &= \{\theta_j\} \times D^{k-1} \text{ onde } \theta_j \in \partial D^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Em particular, V_j é uma variedade $(k-1)$ -dimensional difeomorfa a D^{k-1} (e sua fronteira $\partial V_j = V_j \cap L_y$ é difeomorfa a ∂D^{k-1}) via a aplicação $\Psi_j = \pi_2 \circ \Psi_y|_{V_j}$:

$$V_j \xrightarrow{\Psi_y|_{V_j}} D^{n-k+1} \times D^{k-1} \xrightarrow{\pi_2} D^{k-1},$$

onde π_2 é a projeção nas últimas $k-1$ coordenadas. ◇

A aplicação $\Psi_{y,2} = \pi_2 \circ \Psi_y : N_y \rightarrow D^{k-1}$ leva L_y em ∂D^{k-1} e induz um isomorfismo em homologia

$$H_{k-1}(N_y, L_y) \xrightarrow{(\Psi_{y,2})^*} H_{k-1}(D^{k-1}, \partial D^{k-1}) \xrightarrow{(\Psi_j^{-1})^*} H_{k-1}(V_j, \partial V_j) \approx \mathbb{Z}.$$

Afirmção 5.4. *As variedades instáveis $W^u(x)$ e $W^u(y)$ induzem orientações em V_j , para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.*

Fixadas orientações de forma arbitrária para as variedades instáveis $W^u(z)$, para todo $z \in \text{Crit}(f)$, sabe-se que a orientação de $T_y W^u(y)$ determina um gerador α do grupo de homologia $H_{k-1}(N_y, L_y) \approx \mathbb{Z}$. A classe de homologia de α também determina um gerador para $H_{k-1}(N_1, N_0) \approx \mathbb{Z}$, então os grupos $H_{k-1}(N_y, L_y)$ e $H_{k-1}(N_1, N_0)$ podem ser identificados. O isomorfismo $(\Psi_j^{-1})_* \circ (\Psi_{y,2})_*$ leva o gerador $\alpha \in H_{k-1}(N_y, L_y)$ no gerador $\alpha_j \in H_{k-1}(V_j, \partial V_j)$. Em outras palavras, a classe de homologia de α_j é determinada pela orientação de $T_{v_j} V_j$ herdada pela orientação de $T_y W^u(y)$ via o isomorfismo $T_{v_j} V_j \rightarrow T_y W^u(y)$ determinado pelo fluxo.

Como V_j é uma componente conexa de $N_y \cap W_c^u(x)$, a orientação de $W^u(x)$ induz uma orientação em $T_{v_j} V_j$ do seguinte modo: seja ξ a orientação de $W^u(x)$, a base ordenada $\{\eta_1, \dots, \eta_{k-1}\}$ de $T_{v_j} V_j$ fornece a orientação induzida por ξ em $T_{v_j} V_j$ se a base $\{-\nabla f(v_j), \eta_1, \dots, \eta_{k-1}\}$ está na classe de equivalência da bases que fornecem a orientação ξ para $W^u(x)$. \diamond

Defina n_j igual a $+1$ se as duas orientações recém definidas para $T_{v_j} V_j$ coincidem, caso contrário, defina $n_j = -1$. Então n_j é o sinal associado à órbita conectante em \mathcal{M}_{xy} contendo v_j definido na Seção 2.3.

Note que a esfera instável $W_c^u(x) = W^u(x) \cap f^{-1}(c)$ coincide com $W^u(x) \cap L_x$, portanto $W_c^u(x) \subset W^u(x) \cap N_x$. E sendo $W_c^u(x)$ um conjunto fechado, $cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j) \subset W_c^u(x)$. Deste modo, $(cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j), W_c^u(x), W^u(x) \cap N_x)$ é uma tripla e, pelo Teorema 1.6, tem-se a sequência longa exata

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_k(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j)) &\longrightarrow H_k(W^u(x) \cap N_x, cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j)) \longrightarrow \\ H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)) &\xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Veja ainda que $W^u(x) \cap N_x \subset N_2$, $W_c^u(x) \subset N_1$ e $cl(W_c^u(x) - \cup_{j=1}^m V_j) \subset N_0$. Assim, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - \sqcup_{j=1}^m V_j)) \\ \downarrow \approx & & \downarrow s_* \\ H_k(N_2, N_1) & \xrightarrow{\delta'_*} & H_{k-1}(N_1, N_0) \end{array}$$

onde as aplicações verticais são induzidas pela inclusão e δ'_* é o homomorfismo de conexão

da sequência longa exata associada à tripla (N_0, N_1, N_2) . Este diagrama comuta já que o homomorfismo de conexão é uma aplicação natural.

Veja que

$$H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - \sqcup_{j=1}^m V_j)) \approx \bigoplus_{j=1}^m H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - V_j)) \approx \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{Z}$$

e defina $\delta_{*,j}$ como a j -ésima componente do homomorfismo

$$\delta_* : H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)) \xrightarrow{\delta_*} H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - \sqcup_{j=1}^m V_j))$$

através dessa identificação. Então, para cada $\beta \in H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x))$ tem-se que $\delta_*(\beta) = \delta_{*,1}(\beta) + \cdots + \delta_{*,n}(\beta)$ e

$$s_*(\delta_*(\beta)) = \sum_{j=1}^m s_*(\delta_{*,j}(\beta)) \in H_{k-1}(N_1, N_0) \approx \mathbb{Z}.$$

Como N_x é um espessamento do disco instável fechado $W^u(x) \cap M_c = W^u(x) \cap N_x$, tem-se que

$$(N_x, L_x) \simeq (W^u(x) \cap N_x, W^u \cap L_x) = (W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)).$$

Então, $H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)) \approx H_k(N_x, L_x)$.

Um gerador β do grupo $H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x))$ é tomado como a seguir. Escolhendo triangularizações para os discos fechados $(k-1)$ -dimensionais $V_j \subset W_c^u$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, estenda essas triangularizações para uma triangularização da k -variedade $W^u(x) \cap N_x$ com bordo $W^u(x) \cap L_x$. Essa triangularização, juntamente com a orientação de $W^u(x)$, determina o gerador β .

Note que β também determina um gerador para $H_k(N_2, N_1) \approx H_k(N_x, L_x)$, e vale a identificação

$$H_k(N_2, N_1) = H_k(N_x, L_x) = H_k(W^u(x) \cap N_x, W_c^u(x)).$$

Pela propriedade de excisão,

$$H_{k-1}(W_c^u(x), cl(W_c^u(x) - V_j)) \approx H_{k-1}(V_j, \partial V_j) \approx \mathbb{Z}$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Através desse isomorfismo a imagem da classe de homologia

$\delta_{*,j}(\beta)$ é representada pela triangularização original de V_j junto com a orientação original de $W^u(x)$ e, portanto, corresponde com $n_j\alpha_j$. Como foi visto, $\alpha_j \in H_{k-1}(V_j, \partial V_j)$ corresponde a α através do isomorfismo $H_{k-1}(N_y, L_y) \approx H_{k-1}(V_j, \partial V_j)$, obtém-se deste modo

$$s_*(\delta_*(\beta)) = \sum_{j=1}^m n_j\alpha = n(x, y)\alpha \in H_{k-1}(N_1, N_0) = H_{k-1}(N_y, L_y).$$

Com a identificação $\beta = x$ e $\alpha = y$, tem-se a fórmula

$$\Delta_k(x) = \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n(x, y)y = \partial_k^c(x).$$

E segue o teorema. □

O Teorema 5.1 acima, mostra que o complexo de Morse-Witten para uma variedade Riemanniana M suave e fechada de dimensão finita é um caso especial de matriz de conexão para M , quando se considera os coeficientes em \mathbb{Z} .

Como foi visto na Observação 2.2, o complexo de Morse-Witten pode ser definido para coeficientes mais gerais, de fato, pode-se construir o complexo de Morse-Witten considerando os coeficientes em qualquer grupo abeliano.

Assim, dado um módulo G , o complexo de Morse-Witten, com coeficientes em G , para M está bem definido, basta considerar $\mathcal{C}_k(f, G) = G \otimes \mathcal{C}_k(f)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\partial_k^c(G) = \mathbb{1}_G \otimes \partial_k^c : \mathcal{C}_k(f, G) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f, G).$$

Além disso, $\partial_k^c(G)$ também é uma matriz de conexão para M . A prova desta afirmação segue considerando a aplicação $\Delta(G) := \mathbb{1}_G \otimes \Delta(\mathbb{Z})$, onde $\Delta(\mathbb{Z})$ é a aplicação definida em 5.1, e do fato de que o homomorfismo

$$G \otimes H_k(\cdot; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(\cdot; G)$$

comuta com o operador bordo.

Agora, o Teorema da Homologia de Morse 2.10, que afirma que a homologia do complexo $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$ é isomorfa à homologia singular da variedade M , é facilmente provado usando o

Teorema 5.1.

Demonstração: [Teorema da Homologia de Morse 2.10]

Pelo Teorema 2.9 $\partial_k^c \circ \partial_{k+1}^c = 0$. Mas veja que este fato também é consequência imediata do lema anterior.

Para $j \leq k \leq n$ defina S_{kj} como a união dos conjuntos \mathcal{M}_{xy} de todos os pares de pontos críticos de f satisfazendo $j \leq \text{ind}_f(y) \leq \text{ind}_f(x) \leq k$. (Não sei se é necessário falar que estes conjuntos são compactos.) Veja que, para todo $0 \leq j \leq k \leq n$, S_{kj} é um conjunto invariante e isolado. De fato, se N é uma vizinhança compacta de S_{kj} tal que $\text{Crit}(f) \cap N = \text{Crit}(f) \cap S_{kj}$, então

$$\text{Inv}(N) = \{v \in N : \varphi(t, v) \in N \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\},$$

pela Proposição 2.2. Portanto S_{kj} é um conjunto invariante isolado. Em particular, $S_{n0} = M$ e $S_{kk} = \text{Crit}_k(f)$.

Conley mostra em [2] que existe uma filtração-índice $N_{-1} \subset N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ de modo que $N_n = M$, $N_{-1} = \emptyset$ e (N_k, N_{j-1}) um par-índice para S_{kj} com $j \leq k$.

A invariância do par-índice (Teorema 3.2) e o Exemplo 5.1 implicam que

$$N_k/N_{k-1} \simeq \bigcup_{x \in \text{Crit}_k(f)} N_x / \bigcup_{x \in \text{Crit}_{k-1}(f)} L_x \simeq \bigvee_{x \in \text{Crit}_k(f)} S^k.$$

Portanto, $H_j(N_k, N_{k-1}) = 0$ para todo $j \neq k$ e a sequência longa exata em homologia do par (N_k, N_{k-1}) :

$$\cdots \rightarrow H_{j+1}(N_k, N_{k-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_j(N_{k-1}) \xrightarrow{i_*} H_j(N_k) \xrightarrow{j_*} H_j(N_k, N_{k-1}) \rightarrow \cdots$$

implica que a aplicação de inclusão $H_j(N_{k-1}) \xrightarrow{i_*} H_j(N_k)$ é um isomorfismo para todo $j \neq k, k-1$. Disto segue que:

(i) $H_j(N_k) \rightarrow H_j(M)$ é um isomorfismo para todo $j < k$ pois:

$$H_j(N_k) \xrightarrow{\cong} H_j(N_{k+1}) \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} H_j(N_{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_j(M).$$

(ii) $H_j(N_k) = 0$ para todo $j > k$. Esta afirmação é provada usando indução em k . Se $k = 0$ é claro que $H_j(N_0) = 0$ para todo $j > 0$, já que (N_0, \emptyset) é um par-índice para $\text{Crit}_0(f)$. Agora, assuma que $H_j(N_{k-1}) = 0$ para todo $j > k-1$ e considere a sequência longa

exata do par (N_k, N_{k-1}) :

$$\cdots H_j(N_{k-1}) \rightarrow H_j(N_k) \rightarrow H_j(N_k, N_{k-1}) \rightarrow \cdots$$

Usando a hipótese de indução e o fato de que $H_j(N_k, N_{k-1}) = 0$ tem-se $H_j(N_k) = 0$, para todo $j > k$.

Destes fatos obtém-se o seguinte diagrama comutativo cujas linhas e colunas são exatas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_{k-1}(N_{k-2}) = 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 = H_k(N_{k-1}) & \longrightarrow & H_k(N_k) & \longrightarrow & H_k(N_k, N_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{k-1}(N_{k-1}) \\
 & & & \searrow \delta_* & & & \downarrow j_* \\
 & & & & & & H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})
 \end{array}$$

e $j : (N_{k-1}, \emptyset) \rightarrow (N_{k-1}, N_{k-2})$ é a aplicação de inclusão de pares. Em particular, a aplicação $j_* : H_{k-1}(N_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(N_{k-1}, N_{k-2})$ é injetora, e daí o núcleo dos dois homomorfismos de conexão no diagrama acima coincidem. Ambos são isomorfos a $H_k(N_k)$ e a $\ker \partial_k^c \subset \mathcal{C}_k(f)$.

O primeiro isomorfismo acontece pois se $i : H_k(N_k) \rightarrow H_k(N_k, N_{k-1})$, pela exatidão da linha do diagrama acima i é um isomorfismo sobre sua imagem. Logo

$$H_k(N_k) \approx \text{im } i = \ker \partial_* = \ker \delta_*.$$

O segundo isomorfismo conclui-se diretamente do Teorema 5.1. Assim, a sequência exata em homologia

$$H_{k+1}(N_{k+1}, N_k) \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} H_k(N_k) \xrightarrow{i_*} H_k(N_{k+1}) \longrightarrow 0$$

é isomorfa à sequência exata

$$\mathcal{C}_{k+1}(f) \xrightarrow{\partial_{k+1}^c} \ker \partial_k^c \xrightarrow{i_*} H_k(M) \longrightarrow 0$$

com $H_j(N_k) \xrightarrow{\approx} H_j(M)$ é um isomorfismo se $j < k$ então $H_k(N_{k+1}) \xrightarrow{\approx} H_k(M)$ é um isomorfismo. Pelo teorema de isomorfismo para módulos e pela exatidão desta última sequência segue o resultado almejado:

$$H_k(M) = H_k(M, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_k^c}{\text{im } \partial_{k+1}^c}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$H_k(M, G) \approx HM_k(M, G) = \frac{\ker \partial_k^c(G)}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^c(G)}.$$

□

5.2 Matrizes de Conexão via o Complexo de Morse-Witten

Fixe uma variedade Riemanniana (M, g) que seja suave e fechada e tenha dimensão finita n . Considere ainda um fluxo gradiente negativo φ sobre M oriundo de uma função de Morse-Smale f . Deste modo, como visto no Capítulo 2, está bem definido o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*)^c$ para M .

Cada aplicação $\partial_k^c : \mathcal{C}_k(f) \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ pode ser vista como uma matriz Δ_k de ordem $c_k \times c_k$, onde $c_k = \# \operatorname{Crit}_k(f)$. Mais especificamente, sejam $\operatorname{Crit}_k(f) = \{x_1, \dots, x_{c_k}\}$ e $\operatorname{Crit}_{k-1}(f) = \{y_1, \dots, y_{c_{k-1}}\}$. Então

$$\mathcal{C}_k(f) = \mathbb{Z}\langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle x_{c_k} \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{k-1}(f) = \mathbb{Z}\langle y_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle y_{c_{k-1}} \rangle.$$

E o operador de Morse-Witten é definido nos geradores por

$$\partial_k^c \langle x_i \rangle := \sum_{j=0}^{c_{k-1}} n(x_i, y_j) \langle y_j \rangle.$$

Logo, a aplicação ∂_k^c é representada pela matriz Δ_k :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \cdots & x_{c_k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{c_{k-1}} \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc} n(x_1, y_1) & n(x_2, y_1) & \cdots & n(x_{c_k}, y_1) \\ n(x_1, y_2) & n(x_2, y_2) & \cdots & n(x_{c_k}, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n(x_1, y_{c_{k-1}}) & n(x_2, y_{c_{k-1}}) & \cdots & n(x_{c_k}, y_{c_{k-1}}) \end{array} \right] \end{array}$$

Ou seja, a aplicação ∂_k^c é representada por uma matriz cujas entradas são os números de intersecção $n(x, y)$ entre pontos críticos de índice relativo 1.

Da mesma forma, o operador de Morse-Witten ∂_*^c pode ser visualizado como uma matriz Δ que contém as matrizes Δ_k , para $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}
c_0 \\
\vdots \\
c_{k-2} \\
c_{k-1} \\
c_k \\
c_{k+1} \\
\vdots \\
c_n
\end{array}
\begin{pmatrix}
c_0 & \cdots & c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_n \\
0 & & & & & & & \\
& \boxed{\Delta_{k-1}} & & & & 0 & & \\
0 & & 0 & \boxed{\Delta_k} & & & & \\
& & & 0 & \boxed{\Delta_{k+1}} & & & \\
0 & & 0 & & 0 & \boxed{\Delta_{k+2}} & & \\
& & & & & & & 0 \\
0 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

A matriz Δ é dita uma **matriz de conexão** para M . Na seção anterior foi mostrado que, de fato, Δ é uma matriz de conexão segundo a teoria desenvolvida por Franzosa.

Portanto, para obter uma matriz de conexão para um fluxo Morse-Smale em uma variedade Riemanniana suave e fechada de dimensão finita basta construir o complexo de Morse-Witten.

No Capítulo 2, foram explicitados os complexos de Morse-Witten para várias variedades. Deste modo, as matrizes de conexão via o complexo de Morse-Witten para tais variedades podem ser obtidas facilmente. Segue alguns exemplos de matriz de conexão:

Exemplo 5.3. Considere novamente a esfera S^2 deformada vista no Exemplo 2.3, considere ainda o fluxo gradiente negativo proveniente da função altura em S^2 e as orientações nas variedades instáveis mostradas na Figura 2.10. No Exemplo 2.3 foram obtidas as orientações induzidas nas variedades conectantes de S^2 , de modo que os sinais característicos das órbitas de conexão são os dados na Figura 5.6.

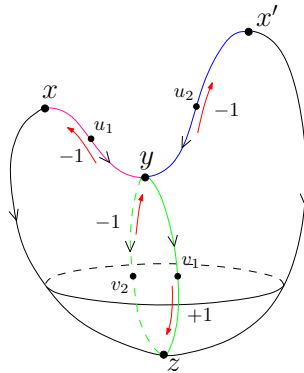


Figura 5.6: Sinais característicos das órbitas conectantes.

$$\Delta(S^2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} z & y & x & x' \end{matrix} \\ \begin{matrix} z \\ y \\ x \\ x' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Assim, uma matriz de conexão para S^2 é dada por:

△

Exemplo 5.4. Considere o fluxo Morse-Smale no toro T^2 como na Figura 5.7. No Exemplo 2.12, foi visto que os grupos de Morse são $\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle s \rangle$, $\mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle r \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle q \rangle$, $\mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle p \rangle$ e $\mathcal{C}_k(f) = 0$, para $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0, 1, 2$.

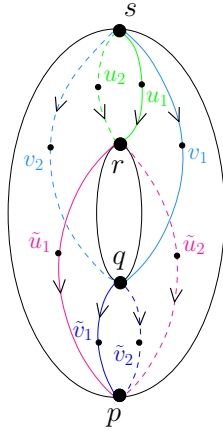


Figura 5.7: Fluxo Morse-Smale no Toro.

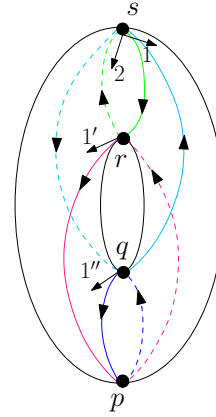


Figura 5.8: Orientações induzidas nas órbitas conectantes.

Considerando as orientações para as variedades instáveis como na Figura 5.8, ainda no Exemplo 2.12, foram obtidos os sinais característicos das órbitas que conectam pontos críticos de índice relativo igual a 1. E estes são dados por:

$$\begin{aligned} n_{u_1} &= n_{v_2} = n_{\tilde{u}_2} = n_{\tilde{v}_1} = 1, \\ n_{u_2} &= n_{v_1} = n_{\tilde{u}_1} = n_{\tilde{v}_2} = -1. \end{aligned}$$

E, portanto, $n(s, r) = n(s, q) = n(r, p) = n(q, p) = 0$. Segue que a matriz de conexão

para o toro segundo o fluxo descrito acima é a matriz de nula:

$$\Delta(T^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

A definição do complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(M, f), \partial_*)^c$ para uma variedade M , apresentada na Seção 2.3, depende do conjunto de orientações escolhidas para as variedades instáveis Or . No exemplo a seguir, são fixadas uma variedade M e uma função de Morse-Smale em M , e são escolhidos dois conjuntos de orientações para as variedades instáveis de M , a partir destes objetos obtém-se as matrizes de conexão referentes a cada conjunto de orientações.

Exemplo 5.5. Considere a esfera S^2 , o fluxo de Morse-Smale e as orientações das variedades instáveis nos pontos críticos, apresentados na Figura 5.9.

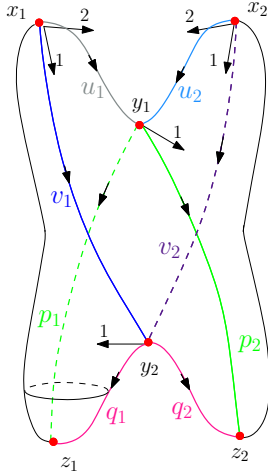


Figura 5.9: Fluxo de Morse em S^2 .

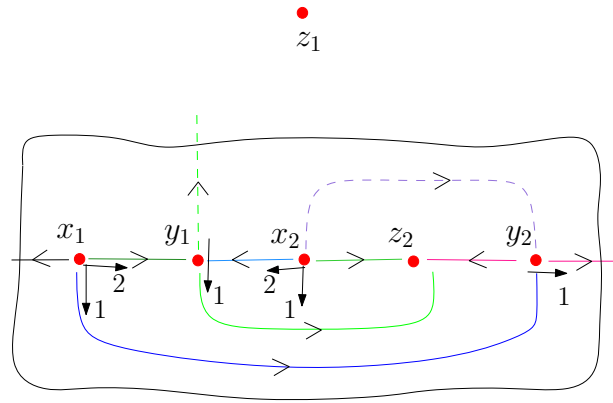


Figura 5.10: Representação planar global do fluxo da figura (5.9).

Denote por f a função de Morse-Smale que dá origem ao fluxo em questão. Os grupos de cadeia de Morse são:

$$\mathcal{C}_2(f) = \mathbb{Z}\langle x_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle x_2 \rangle, \quad \mathcal{C}_1(f) = \mathbb{Z}\langle y_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle y_2 \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_0(f) = \mathbb{Z}\langle z_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle z_2 \rangle.$$

Para encontrar o operador bordo dado pela Definição 2.5, considere a representação planar do fluxo mostrada na Figura 5.10.

Lembre que o sinal característico da órbita através de u é definido pela igualdade: $[\mathcal{O}(u)]_{ind} = n_u[\dot{u}]$. Observe na Figura 5.11(c) que a orientação induzida em $\mathcal{O}(u_1)$ por $\mathcal{M}_{x_1y_1}$ discorda da orientação induzida em $\mathcal{O}(u_1)$ pelo fluxo. Assim, $n_{u_1} = -1$. Da mesma forma $n_{u_2} = -1$, como mostra a Figura 5.11(d).

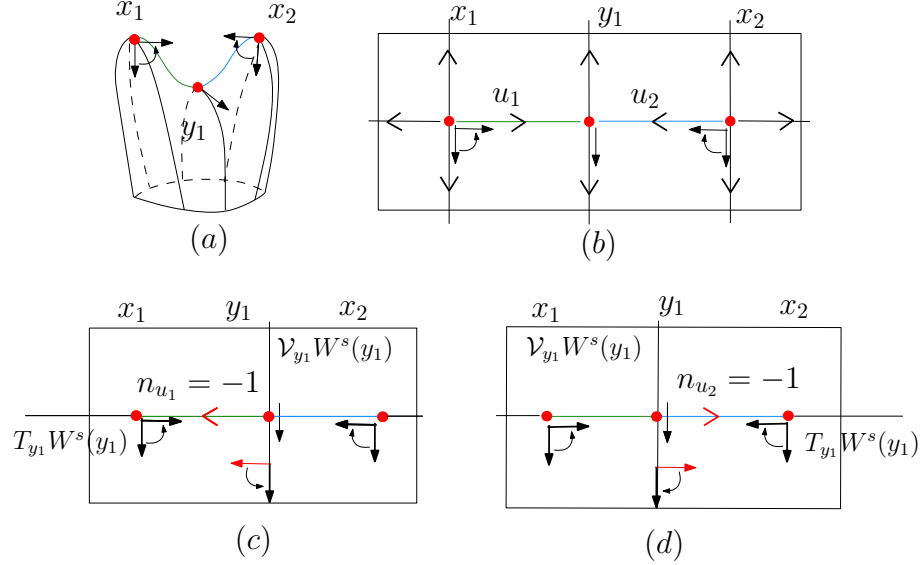


Figura 5.11: Em (a) e (b) representação local do fluxo da Figura 5.9. Em (c) orientação induzida em $\mathcal{O}(u_1)$ por $\mathcal{M}_{x_1y_1}$. Em (d) orientação induzida em $\mathcal{O}(u_2)$ por $\mathcal{M}_{x_2y_1}$.

Através de análise semelhante, vê-se que $n_{v_1} = -1$, $n_{v_2} = -1$.

Com a finalidade de obter o sinal característico de uma órbita que conecta um ponto de sela e um ponto repulsor, basta verificar se a orientação induzida nesta órbita pela orientação da variedade instável do ponto de sela coincide com a orientação da órbita dada pelo fluxo. Logo, $n_{p_1} = -1$, $n_{p_2} = 1$, $n_{q_1} = 1$ e $n_{q_2} = -1$. Veja a Figura 5.9.

Deste modo, a matriz de conexão para S^2 , considerando-se o fluxo e orientações das variedades instáveis como mostra a Figura 5.9, é:

$$\Delta(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os operadores bordo $\partial_2^c : \mathcal{C}_2(f) \rightarrow \mathcal{C}_1(f)$, $\partial_1^c : \mathcal{C}_1(f) \rightarrow \mathcal{C}_0(f)$ e $\partial_0^c : \mathcal{C}_0(f) \rightarrow \bar{0}$ são definidos nos geradores por:

$$\begin{aligned}\partial_2^c \langle x_1 \rangle &= -\langle y_1 \rangle - \langle y_2 \rangle, & \partial_2^c \langle x_2 \rangle &= -\langle y_1 \rangle - \langle y_2 \rangle, \\ \partial_1^c \langle y_1 \rangle &= \langle z_2 \rangle - \langle z_1 \rangle, & \partial_1^c \langle y_2 \rangle &= \langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle, \\ \partial_0^c \langle z_1 \rangle &= 0 & e & \partial_0^c \langle z_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Calculando a homologia do complexo $(\mathcal{C}_*(S^2, f), \partial_*^c)$, tem-se a homologia singular da esfera S^2 :

$$HM_0(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad HM_1(S^2, \mathbb{Z}) = \bar{0} \quad e \quad HM_2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

Ainda considerando a esfera e o fluxo na Figura 5.9, mantenha as orientações já consideradas das variedades instáveis dos pontos críticos, exceto do ponto y_2 , para o qual considere a orientação oposta à orientação considerada anteriormente. Através de um processo análogo, obtém-se a matriz de conexão:

$$\Delta(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

△

Observe que no exemplo anterior foram obtidas duas matrizes para a esfera S^2 , e estas possuem entradas diferentes. Deste modo, pode-se obter “várias matrizes de conexão” via o complexo de Morse-Witten para uma variedade. Mas estas matrizes têm uma relação forte entre si que é garantida pela próxima proposição. Denote por $\Delta(M, f, Or)$ a matriz de conexão de M obtida via o complexo de Morse-Witten considerando a função de Morse f e o conjunto de orientações Or .

Proposição 5.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana suave e compacta de dimensão finita n e seja f uma função de Morse-Smale sobre M . Sejam Or e Or' dois conjuntos de orientações para as variedades instáveis dos pontos críticos de f . Então as matrizes $\Delta(M, f, Or)$ e $\Delta(M, f, Or')$ são semelhantes.*

Demonstração: Como uma função de Morse admite apenas uma quantidade finita de pontos críticos, os conjuntos Or e Or' são finitos. Portanto, basta mostrar o caso em que os conjuntos de orientações Or e Or' não coincidem apenas por uma orientação. Nesse sentido, denote por x o ponto crítico cujas orientações ξ e ζ para $W^u(x)$ dadas pelos conjuntos Or e Or' , respectivamente, sejam opostas. Seja $k := \text{ind}_f(x)$, dado $y \in \text{Crit}_{k-1}(f)$, denote por $n(x, y)$ e $\bar{n}(x, y)$ os números de intersecção considerando as orientações Or e Or' , respectivamente. Analogamente, para $z \in \text{Crit}_{k+1}(f)$.

Existem dois casos a considerar: $\text{ind}_f(x) = 1$ e $\text{ind}_f(x) > 1$.

1º Caso: Suponha que $\text{ind}_f(x) = 1$. Seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, a orientação induzida na órbita de u é dada pela orientação de $W^u(x)$. Como ξ e ζ são opostas, estas induzem orientações opostas na órbita de u . Portanto uma delas coincide com a orientação dada pelo fluxo e a outra é exatamente a orientação oposta, isto é, $n_u = 1$ e $\bar{n}_u = -1$ ou $n_u = -1$ e $\bar{n}_u = +1$. Como u é arbitrário, tem-se $n(x, y) = -\bar{n}(x, y)$.

Agora, seja $v \in \widehat{\mathcal{M}}_{zx}$. A orientação induzida na órbita de v pelo conjunto de escolha de orientações, é dada pelo isomorfismo:

$$T_{\mathcal{O}(v)}W^u(z) \approx T\mathcal{O}(v) \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{O}(v)}W^s(x). \quad (5.2)$$

As orientações de $T_{\mathcal{O}(v)}W^u(z)$ dadas pelos conjuntos Or e Or' coincidem, mas estes conjuntos induzem orientações opostas em $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(v)}W^s(x)$, pois a orientação induzida neste fibrado é compatível com a orientação de $W^u(x)$, e este último tem orientações opostas ξ e ζ dadas pelos conjuntos Or e Or' . Deste modo, as orientações que estes conjuntos induzem na órbita de v também são opostas, pelo isomorfismo acima. Sendo v arbitrário, $n(z, x) = -\bar{n}(z, x)$.

Assim, a matriz $\Delta(M, f, Or')$ é obtida de $\Delta(M, f, Or)$ multiplicando-se a coluna e a linha referentes à x por -1 .

2º Caso: Suponha que $\text{ind}_f(x) > 1$. Seja $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$, a orientação induzida na órbita de u , $\mathcal{O}(u)$, é dada pelo isomorfismo:

$$T_{\mathcal{O}(u)}W^u(x) \approx T\mathcal{O}(u) \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{O}(u)}W^s(y). \quad (5.3)$$

As orientações dadas pelos conjuntos Or e Or' para $W^u(y)$ são as mesmas, logo estes dois conjuntos induzem a mesma orientação no fibrado $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(u)}W^s(y)$, pois as orientações de $W^u(y)$ e $\mathcal{V}_{\mathcal{O}(u)}W^s(y)$ são compatíveis. Já as orientações ξ e ζ de $T_{\mathcal{O}(u)}W^u(x)$ dadas pelos conjuntos Or e Or' são opostas. Destas observações e da equação (5.3) segue que as orientações

induzidas na órbita de u por Or e Or' são opostas. Portanto, $n(x, y) = -\bar{n}(x, y)$, pois o ponto u foi tomado arbitrariamente.

Agora, dado $v \in \widehat{\mathcal{M}}_{zx}$, a demonstração de que $n(z, x) = -\bar{n}(z, x)$ é análoga a já feita acima para o primeiro caso.

Neste caso, também se verifica que a matriz $\Delta(M, f, Or')$ é obtida de $\Delta(M, f, Or)$ multiplicando-se a coluna e a linha referentes a x por -1 . \square

A demonstração da Proposição 5.1 mostra que a relação entre as matrizes de conexão $\Delta(M, f, Or)$ e $\Delta(M, f, Or')$, obtidas por escolhas diferentes de orientações para as variedades instáveis dos pontos críticos, vai além de semelhança de matrizes. Uma é obtida da outra apenas multiplicando-se por -1 certas linhas e colunas. Mais especificamente, se os conjuntos Or e Or' diferem pelas orientações dos pontos críticos a_1, \dots, a_l , então a matriz $\Delta(M, f, Or')$ é obtida de $\Delta(M, f, Or)$ multiplicando-se por -1 as linhas e colunas referentes aos pontos a_1, \dots, a_l .

Deste modo, uma entrada da matriz $\Delta(M, f, Or)$ é não nula se, e somente se, é não nula em $\Delta(M, f, Or')$. De forma mais geral, as entradas de $\Delta(M, f, Or)$ e $\Delta(M, f, Or')$ diferem apenas por sinal. Em outras palavras, dadas uma variedade Riemanniana (M, g) suave e compacta de dimensão finita e uma função de Morse-Smale sobre M , as matrizes de conexão para M obtidas via o complexo de Morse-Witten são iguais módulo 2.

Mas este fato já era esperando, pois a Proposição 4.13 garante que, dado um fluxo Morse-Smale sob uma variedade Riemanniana M compacta e suave de dimensão finita, considerando a homologia sobre \mathbb{Z}_2 , então a entrada da matriz de conexão correspondentes aos pontos críticos $x \in \text{Crit}_k(f)$ e $y \in \text{Crit}_{k-1}(f)$ conta o número de órbitas conectantes de x à y módulo 2.

Veja que, nos exemplos acima, as entradas da matrizes de conexão estão no conjunto $\{-1, 0, +1\}$. De fato, as matrizes de conexão, obtidas via o complexo de Morse-Witten, para superfícies orientáveis têm por característica que suas entradas são 0, $+1$ ou -1 .

Proposição 5.2. *Sejam M uma variedade orientável fechada 2-dimensional e φ um fluxo de Morse-Smale em M . Então as entradas da matriz de conexão pertencem ao conjunto $\{-1, 0, 1\}$.*

Demonstração: No caso de um fluxo de Morse-Smale, a entrada da matriz de conexão correspondente ao par (x, y) de pontos críticos com índice relativo 1 é dada pelo número de

interseção $n(x, y) = \sum n_u$, onde $u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}$. Assim, basta mostrar que $n(x, y) \in \{-1, 0, 1\}$, para todos os pontos críticos de f com índice relativo igual a 1 e com $0 \leq \text{ind}_f(y) < \text{ind}_f(x) \leq n$.

Como $\dim(M) = 2$, $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} \leq 2$, pelo Teorema 2.3. Se $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = 1$ não há o que fazer, pois neste caso $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \{u\}$ e, portanto $n(x, y) = n_u$. Mas o sinal característico de uma órbita é $+1$ ou -1 .

Agora, se $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = 2$, por exemplo $\widehat{\mathcal{M}}_{xy} = \{u_1, u_2\}$, então existem dois casos a considerar:

Caso 1: x é uma sela e y é um ponto atrator. O fluxo tangente induz a mesma orientação nas órbitas $\mathcal{O}(u_1)$ e $\mathcal{O}(u_2)$, pois o fluxo é do tipo gradiente. Assim $[u_1] = [u_2]$. Já a orientação que \mathcal{M}_{xy} induz em $\mathcal{O}(u_1)$ é oposta à orientação induzida por \mathcal{M}_{xy} em $\mathcal{O}(u_2)$, veja a Figura 5.12. Sendo $[\mathcal{O}(u_i)]_{\text{ind}} = n_{u_i}[u_i]$, então $n_{u_1} = 1$ e $n_{u_2} = -1$ ou $n_{u_1} = -1$ e $n_{u_2} = 1$. De qualquer forma $n(x, y) = 0$.

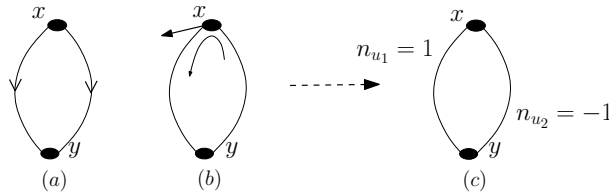


Figura 5.12: Representações das orientações induzidas pelo fluxo em (a), pelo espaço \mathcal{M}_{xy} em (b), e sinais característicos em (c), quando x é um ponto de sela e y é um ponto atrator.

Caso 2: x é um ponto repulsor e y um ponto de sela. Novamente as orientações induzidas pelo fluxo tangente em $\mathcal{O}(u_1)$ e $\mathcal{O}(u_2)$ são as mesmas. No entanto, as orientações $[\mathcal{O}(u_i)]$, $i = 1, 2$, são opostas; como se vê na Figura 5.13.

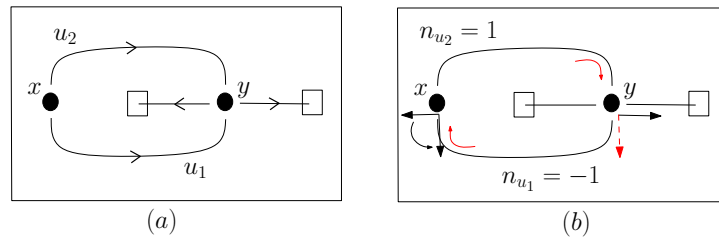


Figura 5.13: Fluxo local: orientações induzidas pelo fluxo em (a) e por \mathcal{M}_{xy} em (b).

Para este caso também se verifica que $n(x, y) = 0$

□

O exemplo a seguir garante que a hipótese de orientabilidade sobre a variedade 2-dimensional na Proposição 5.2 é essencial.

Exemplo 5.6 (Matriz de Conexão para o Plano Projetivo Real.). Retome o Exemplo 2.13 de um fluxo de Morse-Smale sobre o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$, que possui três singularidades: um ponto repulsor x , um ponto de sela y e um ponto atrator z . Considerando as orientações das variedades instáveis dos pontos críticos como na Figura 5.14, já foi visto no Exemplo 2.13 que as orientações nas órbitas conectantes são as dadas na figura abaixo.

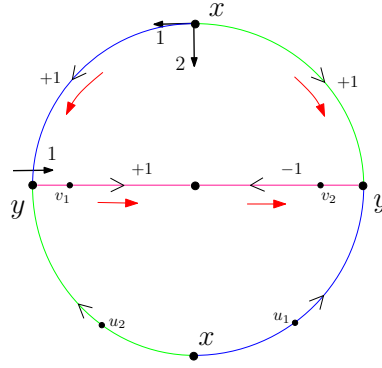


Figura 5.14: Fluxo de Morse-Smale em $\mathbb{R}P^2$.

Ou seja, $n(x, y) = n_{u_1} + n_{u_2} = 1 + 1 = 2$ e $n(y, z) = +1 - 1 = 0$. Além disso, os operadores bordos são definidos nos geradores por:

$$\begin{array}{lll} \partial_2^c : \mathcal{C}_2(f) \rightarrow \mathcal{C}_1(f) & \partial_1^c : \mathcal{C}_1(f) \rightarrow \mathcal{C}_0(f) & \partial_0^c : \mathcal{C}_0(f) \rightarrow \bar{0} \\ \langle x \rangle \mapsto 2\langle y \rangle & \langle y \rangle \mapsto 0 & \langle z \rangle \mapsto 0 \end{array}$$

E a matriz de conexão para o fluxo minimal no $\mathbb{R}P^2$ é

$$\Delta(\mathbb{R}P^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando a homologia de Morse do complexo $(\mathcal{C}_*(\mathbb{R}P^2, f), \partial_*^c)$ obtém-se a homologia singular do $\mathbb{R}P^2$:

$$HM_0(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \mathbb{Z}, \quad HM_1(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = \mathbb{Z}_2 \quad e \quad HM_2(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c) = 0.$$

É claro que a Proposição 5.2 é válida se a variedade M for de dimensão 1. A pergunta natural que surge é: uma matriz de conexão para fluxos de Morse-Smale em variedades de dimensão maior que 2 pode apresentar uma entrada inteira com módulo maior que 1? A breve investigação feita a seguir para o caso tridimensional garante que a resposta a esta pergunta é afirmativa.

No caso de um fluxo Morse-Smale sob uma variedade tridimensional, as singularidades são dos seguintes tipos: um ponto repulsor, um ponto atrator, um ponto de sela de índice 2 e um ponto de sela de índice 1. As dinâmicas locais dos pontos de sela são apresentadas nas figuras 5.15 e 5.16.

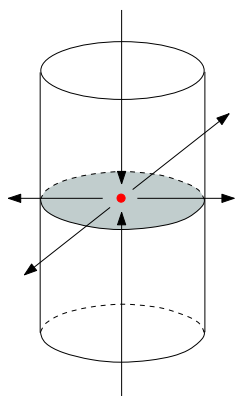


Figura 5.15: Ponto de sela em \mathbb{R}^3 de índice de Morse 2.

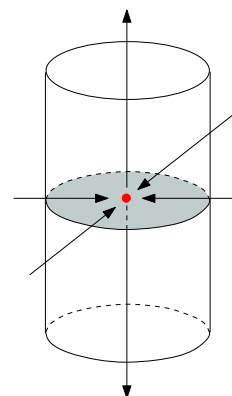


Figura 5.16: Ponto de sela em \mathbb{R}^3 de índice de Morse 1.

Considere um fluxo de Morse-Smale sob uma 3-variedade orientável M . O objetivo é mostrar que se Δ é uma matriz de conexão para M , obtida via o complexo de Morse-Witten, as entradas nesta matriz correspondentes a ligações entre um ponto repulsor x e um ponto de sela s_2 de índice 2 ou entre um ponto de sela s_1 de índice 1 e um ponto atrator z só podem ser -1 , 0 ou $+1$.

De fato, a variedade estável de s_2 é composta por duas órbitas regulares, de modo que $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xs_2} \leq 2$. Se $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xs_2} < 2$, não há o que fazer. Suponha $\#\widehat{\mathcal{M}}_{xs_2} = \{u, v\}$. A orientação de $W^u(x)$ pode ser “carregada” até o ponto s_2 através das órbitas de u e de v . Sendo M orientável, não importa qual caminho é percorrido, obtém-se a mesma orientação ao chegar no ponto s_2 . Deste modo, os sinais característicos das órbitas de u e v se cancelam, e $n(x, s_2) = 0$. Veja Figura 5.17.

Portanto as entradas de Δ correspondentes a ligações entre pontos repulsores e pontos

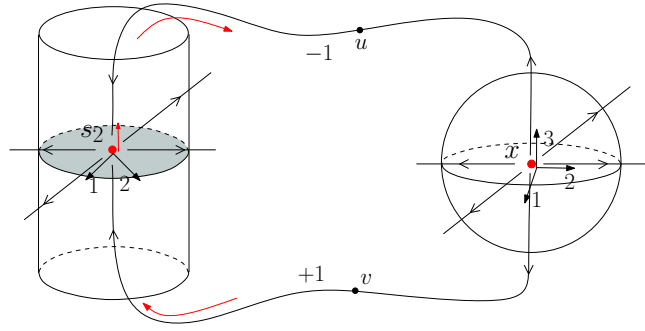


Figura 5.17: Sinais característicos das órbitas que conectam um repulsor à uma sela de índice 2.

de sela de índice 2 só podem ser nulas ou ± 1 . Analogamente mostra-se que as entradas correspondentes a ligações entre pontos atratores e pontos de sela de índice 1 estão no conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

Já as entradas da matriz de conexão que estão relacionadas aos pontos de sela s_1 e s_2 não se limitam ao conjunto $\{-1, 0, +1\}$, pois a quantidade de órbitas que conectam s_2 à s_1 depende de que forma a alça relativa ao ponto de sela s_2 é colada na variedade estável do ponto s_1 . De modo que há inúmeras possibilidades.

Como já foi mencionado, neste trabalho foram abordadas duas teorias de forma independentes: a teoria de Conley e a teoria da homologia de Morse.

Primeiramente foi estudada a teoria de Morse. Foi visto que, dadas uma variedade Riemanniana (M, g) , suave e fechada de dimensão finita, e uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cujo fluxo gradiente negativo φ satisfaz a condição de Morse-Smale, o grupo graduado de Morse $\mathcal{C}_*(f) = \{\mathcal{C}_k(f)\}$ com coeficientes inteiros e graduado pelos índices de Morse, foi definido por:

1. $\mathcal{C}_k(f) = 0$, se $k < 0$;
2. se $k \geq 0$, $\mathcal{C}_k(f) := \bigoplus \mathbb{Z}\langle x \rangle$, onde a soma percorre o conjunto $Crit_k(f)$.

O operador de Morse-Witten $\partial_k^c(x) : \mathcal{C}_k(f) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(f)$ foi definido nos geradores x de $\mathcal{C}_k(f)$ por

$$\partial_k^c \langle x \rangle := \sum_{y \in Crit_{k-1}(f)} n(x, y) \langle y \rangle, \quad n(x, y) = \sum_{u \in \widehat{\mathcal{M}}_{xy}} n_u,$$

Destes elementos surgiu o complexo de Morse-Witten $(\mathcal{C}_*(f), \partial_*^c)$. Um resultado importante que foi visto é que a homologia de Morse coincide com a homologia singular da variedade M .

Na teoria de Conley o objeto básico de estudo era um conjunto invariante isolado S . Foi definido o conceito de par-índice para S ; foi visto que pares-índice existem para quaisquer conjuntos invariantes isolados e que, dados dois pares-índice para S , estes têm o mesmo tipo de homotopia. A partir da invariância do par-índice, definiu-se o índice homotópico de Conley para S como sendo o tipo de homotopia de um par-índice para S .

Já o índice homológico de S foi definido como sendo a homologia do espaço pontuado N/L , onde (N, L) é um par-índice para S . A propriedade mais importante do índice homológico, vista no decorrer deste trabalho, foi que conjuntos relacionados por continuação possuem o mesmo índice homológico.

Para simplificar o estudo de um conjunto invariante isolado S , foram definidas duas decomposições de S : a decomposição em par atrator-repulsor e a decomposição de Morse, que generaliza a primeira. Uma decomposição de Morse \prec -ordenada é formada por uma coleção finita M_π de subconjuntos invariantes isolados disjuntos de S , de modo que cada elemento de S pertence a algum M_π ou a alguma órbita que “nasce” em $M_{\pi'}$ e “morre” em M_π tais que $\pi \prec \pi'$.

Tendo em mãos uma decomposição de Morse \prec -ordenada, definiu-se matriz de conexão de uma forma puramente algébrica. De modo geral, a matriz de conexão foi definida como sendo uma matriz que tem como entradas aplicações entre os índices homológicos de Conley dos conjuntos M_π . Foi visto que a importância da matriz de conexão no estudo da dinâmica de um fluxo sobre um conjunto invariante isolado está no fato de que suas entradas não nulas podem detectar a existência de órbitas conectantes entre conjuntos de Morse.

O principal objetivo deste trabalho foi estudar uma forma mais simples de obter uma matriz de conexão. Para o caso de fluxos Morse-Smale sobre uma variedade Riemanniana M , suave, fechada e de dimensão finita; foi visto que a diferencial do complexo de Morse-Witten é uma matriz de conexão para M .

Referências Bibliográficas

- [1] BANYAGA, A.; HURTUBISE, D. *Lectures on Morse Homology*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] CONLEY, C. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CMBS Regional Conference Series in Mathematics, n. 38. Providence: American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [3] BOTT, R. *Morse Theory Indomitable*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1988.
- [4] FRANKS, J.M. *Homology and dynamical systems*. CMBS Regional Conference Series in Mathematics, n. 49. Providence: American Mathematical Society, R.I., 1982.
- [5] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [6] HIRSCH, M.W. *Differential Topology*. Springer, 1976.
- [7] FRANZOSA, R.D. *Index filtrations and the homology index braid for partially ordered Morse decompositions..* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 298, n. 1, p. 193-213, November 1986.
- [8] FRANZOSA, R.D. *The connection matrix theory for Morse decompositions*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 311, n. 2, p. 561-592, February 1989.
- [9] FRANZOSA, R.D. *The continuation theory for Morse decompositions and connection matrices*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 310, n. 2, p. 781-803, December 1988.
- [10] KURLAND, H.L. *Homotopy invariants of a repeller-attractor pair I. The Puppe Sequence of an R-A pair*. J. Differential Equations, vol. 46, p. 1-31, 1982.

- [11] MILNOR, J. *Morse theory*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1968.
- [12] McCord, C. *The connection map for attractor-repeller pairs*. Transactions of the American Mathematical Society, vol 307, p. 195-203, 1988.
- [13] MISCHAIKOW, K.; MROZEK, M. *The Conley index theory*. July 2000. Disponível em <http://www.ii.uj.edu.pl/~mrozek/>
- [14] MUNKRES, J. *Topology, A First Course*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [15] PALIS, J.; MELO, W. *Geometric theory of dynamical systems An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [16] REINECK, J.F. *The connection matrix in Morse-Smale flows*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 322, n. 2, p. 523-545, December 1990.
- [17] ROTMAN, J. *An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [18] SALAMON, D.A. *Connected Simple Systems and The Conley Index of Isolated Invariants Sets*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 291, n. 1, p. 1-41, (1985).
- [19] SALAMON, D.A. *The Morse Theory, The Conley Index and The Floer Homology*. Bull. London Math.Soc. 22 1990, 113-240.
- [20] SILVEIRA, M.R. *A dinâmica por trás da sequência espectral*. Tese de doutorado - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível na página <http://libdigi.unicamp.br>.
- [21] SPANIER, E. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [22] VICK, J.W. *Homology theory An Introduction to algebraic topology*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [23] WEBER, J. *The Morse-Witten complex via dynamical systems*. Expositiones Mathematicae n. 24, 127-159, 2006.